

# 一种基于均值筛选的粒子滤波算法<sup>\*</sup>

王 光, 邱云飞, 李红霞

(辽宁工程技术大学 软件学院, 辽宁 葫芦岛 125100)

**摘 要:** 针对基于均值筛选的粒子滤波算法 MPF, 利用无迹卡尔曼粒子滤波产生一步预测。在重采样阶段, 利用对粒子按照权值大小进行排序的确定性重采样策略。为了克服样本耗尽问题, 在统计所有粒子权值的均值后, 对于权值小于均值的粒子进行一步权值平缓化变异。仿真实验表明 MPF 精确度优于其他 5 种流行的滤波算法。

**关键词:** 非线性滤波; 粒子滤波; 无迹卡尔曼滤波; 均值筛选

中图分类号: TP242

文献标识码: A

## A new particle filtering basing on mean selecting

WANG Guang, QIU Yun Fei, LI Hong Xia

(Department of Software, Liaoning Technical University, Huludao 125100, China)

**Abstract:** This paper proposed a novel filtering method—mixed unscented particle filtering (MPF) for nonlinear dynamic systems. MPF mainly includes two steps. At first unscented extended Kalman filter was used as proposal distribution to generate particles; Secondly, after getting means and variances of the proposal distribution, these particles were refined using unscented transformation. The proposed MPF algorithm was compared with other five filtering algorithms and the simulating results show that means and variances of MPF are lower than other filtering algorithms.

**Key words:** nonlinear filtering; particle filtering; unscented Kalman filtering; mean selecting

### 1 非线性滤波问题描述

非线性滤波问题的描述如下: 设非线性离散时间动态系统由式(1)、式(2)表示:

$$x_t = f(x_{t-1}) + w_{t-1} \quad (1)$$

$$y_t = h(u_t, x_t) + v_t \quad (2)$$

假设系统状态符合一阶马尔科夫过程:

$$p(x_k | x_{0:k-1}) = p(x_k | x_{k-1}) \quad (3)$$

且观测值独立于给定的系统:

$$p(y_k | x_k) = p(y_k | x_k) \quad (4)$$

则给定系统状态空间模型, 就可以由下式迭代计算得系统后验概率<sup>[1]</sup>:

$$p(x_k | y_{1:k}) = \frac{p(y_k | x_k) p(x_k | y_{1:k-1})}{p(y_k | y_{1:k-1})} \quad (5)$$

在计算中,  $p(y_k | x_k)$  由观测模型给出;  $p(x_k | y_{1:k-1})$  和  $p(y_k |$

$y_{1:k-1})$  由下式计算而得:

$$p(x_k | y_{1:k-1}) = \int p(x_k | x_{k-1}) p(x_{k-1} | y_{1:k-1}) dx_{k-1} \quad (6)$$

$$p(y_k | y_{1:k-1}) = \int p(y_k | x_k) p(x_k | y_{1:k-1}) dx_k \quad (7)$$

粒子滤波算法通过寻找 1 组在状态空间中传播的随机样本对概率密度函数  $p(x_k | y_k)$  进行近似, 以样本均值代替积分运算, 从而获得状态最小方差估计的过程<sup>[2]</sup>。对于基于 SIS 的算法而言, 粒子匮乏是其主要缺陷。Doucet 从理论上证明了 SIS 算法出现粒子匮乏现象的必然性。降低粒子匮乏现象影响的方法是选择适当的重要性函数和采用重采样方法<sup>[3-5]</sup>。通常, 对于一般的非线性系统很难准确得到后验概率分布的表达式, 直接从后验概率中抽取样本很困难。因此通常利用建议概率分布来代替后验概率分布函数<sup>[6]</sup>, 一般选用系统状态的转移概

<sup>\*</sup> 基金项目: 国家自然科学基金项目(70572070)

率作为重要性密度函数,但由于它没有用到最新的观测信息,使得产生的粒子样本经常集中在后验概率的尾部,从而导致粒子选择的盲目性,降低状态的估计精度<sup>[7]</sup>。Freitas 等人利用 EKF 作为建议分布来产生重要性密度函数构成 PF-EKF 算法。Merwe 等人提出了利用无迹卡尔曼滤波作为建议分布的粒子滤波器,从而构成 PF-UKF 算法<sup>[8]</sup>。

本文提出一种新的混合粒子滤波算法 MPF,首先利用无迹卡尔曼粒子滤波产生一步预测,之后在重采样阶段,利用对粒子按照权值大小进行排序的确定性重采样策略。为了克服样本耗尽问题,在统计所有粒子权值的均值后,对于权值小于均值的粒子进行一步权值平缓化变异。通过实验可以看到,MPF 算法相对于经典的 EKF、UKF、PF 以及 PF-UKF 算法有着更高的精确度。

## 2 基本粒子滤波算法

粒子滤波算法通过寻找一组在状态空间中传递的随机样本对概率密度函数  $p(x_k|y_k)$  进行近似,以样本均值代替积分运算,从而获得状态最小方差的估计过程。每个粒子有自身的权值和数值。时刻  $k$  的权值递推公式为:

$$\begin{aligned} w_k &= \frac{p(y_{1:k}|x_{0:k})p(x_{0:k})}{q(x_k|x_{0:k-1}, y_{1:k})q(x_{0:k-1}|y_{1:k})} \\ &= w_{k-1} \frac{p(y_k|x_k)p(x_k|x_{k-1})}{q(x_k|x_{0:k-1}, y_{1:k})} \end{aligned} \quad (8)$$

后验概率密度可以近似表示为:

$$p(x_{0:k}|y_{1:k}) \triangleq \sum_{i=1}^N w_i \delta(x_{0:k} - x_{0:k}^{(i)}) \quad (9)$$

对于粒子滤波算法,粒子匮乏是其主要缺陷。粒子匮乏是指随着迭代次数增加,粒子丧失多样性的现象。降低该现象的主要策略是选择重要性函数和采用重采样方法。Liu 等人证明了最优重要性函数为<sup>[7]</sup>:  $q(x_k|x_{0:k-1}, y_{1:k}) = p(x_k|x_{0:k-1}, y_{1:k})$ 。为了计算方便,通常选用系统状态的转移概率作为重要性密度函数:

$$q(x_k|x_{0:k-1}, y_{1:k}) = p(x_k|x_{0:k-1}) \quad (10)$$

但由于没有用最新的观测信息,使得产生的粒子样本经常集中在后验概率的尾部,从而导致粒子选择的盲目性,降低状态的估计精度。重采样是降低粒子匮乏的另一个重要方法。经过重采样,在粒子数保持不变的情况下,权值较大的样本被多次复制,而权值较小的粒子的复制受到抑制甚至无子代,从而造成粒子集的多样性减弱,产生样本枯竭问题<sup>[6]</sup>。

基本粒子滤波算法步骤如下:

初始化:  $t=0$

从先验分布  $p(x_0)$  抽取采样点  $x_0^{(i)}$ ;

对于每个采样时间

//预测与更新阶段

//重要性采样阶段:

对于每个采样粒子

从建议分布  $q(x_t|x_{0:t-1}, y_{1:t})$  抽取采样点

$x_0^{(i)}$ , 并置  $\hat{x}_{0:t}^{(i)} \triangleq (x_{0:t-1}^{(i)}, x_t^{(i)})$ ;

利用  $y_t - \hat{y}_{t|t-1}^{(i)}$  构造  $likelihood_t^{(i)}$

计算粒子权值  $w_t^{(i)} \triangleq likelihood_t^{(i)}$

权重归一化:  $\tilde{w}_t^{(i)} = w_t^{(i)} / \sum_{j=1}^N w_t^{(j)}$ ;

//重采样阶段:

根据  $\tilde{w}_t^{(i)}$  权重的相对大小,从  $p(x_{0:t}|y_{1:t})$  中抽取  $N$  个独立同分布采样点  $x_t^{(i)}$ ;并将权值设为同一值。

$$w_t^{(i)} = \tilde{w}_t^{(i)} = 1/N$$

//输出阶段:

$$\begin{aligned} \hat{x}_t &= E(x_t|y_{1:t}) \triangleq \sum_{i=1}^N w_t^{(i)} x_t^{(i)} \\ \hat{P}_t &= \sum_{i=1}^N w_t^{(i)} (\hat{x}_t - x_t^{(i)})(\hat{x}_t - x_t^{(i)})^T \end{aligned}$$

## 3 新的混合粒子滤波算法

### 3.1 无迹卡尔曼滤波

无迹卡尔曼滤波 UKF 基于无迹变换 UT,用一组确定的带有权值的 sigma 点来对非线性函数的概率密度分布进行近似。UKF 对非线性函数的概率密度分布进行近似,而不是对非线性函数进行近似。其非线性分布统计量的计算精度至少达到 2 阶,对于采用特殊的采样策略,如高斯分布 4 阶采样和偏度采样等可达到更高阶精度。相对于 EKF,UKF 不需要求导计算 Jacobian 矩阵,可处理非加性噪声情况以及离散系统,扩大了应用范围,同时计算量与 EKF 同阶。

由于采用确定性采样策略,而非 PF 的随机采样,避免了粒子衰退问题。在 UKF 算法中,由于具有噪声项,需要对状态进行扩维处理。初始化时,令:

$$\begin{aligned} x_0^{(-i)} &= E(x_0^{(i)}) \\ p_0 &= E((x_0^{(i)} - x_0^{(-i)})(x_0^{(i)} - x_0^{(-i)})^T) \\ x_0^{(-i,a)} &= E(x_0^{(i,a)}) = [(x_0^{(-i)})^T, 0, 0]^T \\ p_0^{(i,a)} &= E((x_0^{(i,a)} - x_0^{(-i,a)})(x_0^{(i,a)} - x_0^{(-i,a)})^T) = \text{diag}(p_0^{(i)} QR) \end{aligned} \quad (11)$$

在 UT 变换中,首先计算  $2n+1$  个 sigma 点的值和权值。其值由下式确定:

$$\begin{cases} x_0 = x \\ x_i = x + (\sqrt{(n_x + \lambda)P_x})_i, & i=1, 2, \dots, n_x \\ x_i = x - (\sqrt{(n_x + \lambda)P_x})_i, & i=n_x+1, \dots, 2n_x \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} W_0^{(m)} = \frac{\lambda}{n_x + \lambda} \\ W_0^{(c)} = \frac{\lambda}{n_x + \lambda} + (1 - \alpha^2 + \beta) \\ W_i^{(m)} = W_i^{(c)} = \frac{\lambda}{2(n_x + \lambda)} \quad i = 1, 2, \dots, 2n_x \end{cases} \quad (13)$$

其中,  $W_i$  表示第  $i$  个 sigma 的权值;  $W_i^{(m)}$  是用来计算均值的权值,  $W_i^{(c)}$  是用来计算方差的权值,  $\lambda = \alpha^2(n_x + k) - n_x$  是 1 个尺度调节因子,  $\alpha$  决定了 sigma 点集在  $\bar{x}$  附近的分布情况。

获得 sigma 点的值及其权值后, 就可以用下式获得观测值的均值和方差。

$$\bar{y}_t = \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(m)} g(\chi_i) \quad (14)$$

$$P_t = \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(m)} g(\chi_i - \bar{y}_t) g(\chi_i - \bar{y}_t)^T \quad (15)$$

其中,  $g(\cdot)$  为非线性函数。

### 3.2 混合粒子滤波器 MPF

对于  $t$  时刻的第  $i$  个粒子, 首先利用式(12)、式(13)计算 sigma 点的值和权值:

$$\chi_{t-1}^{(i)a} = [x_{t-1}^{(i)a} \quad x_{t-1}^{(i)a} \pm \sqrt{(na+\lambda)p_{t-1}^{(i)a}}] \quad (16)$$

迭代计算进行一步预测:  $\chi_{t|t-1}^{(i)x} = f(\chi_{t-1}^{(i)x}, \chi_{t-1}^{(i)w})$ , 利用  $x_t^{(i)}$  和式(14)、式(15)计算  $\bar{x}_{t|t-1}^{(i)}$ ,  $P_{t|t-1}^{(i)}$ 。之后, 将其带入式(17)计算  $\chi_{t|t-1}^{(i)x}$  的一步预测。

$$\begin{aligned} \gamma_{t|t-1}^{(i)} &= h(\chi_{t|t-1}^{(i)x}, \chi_{t-1}^{(i)v}) \\ \gamma_{t|t-1}^{(i)} &= \sum_{j=0}^{2n_x} W_j^{(m)} \gamma_{j,t|t-1}^{(i)} \\ P_{\gamma, \gamma} &= \sum_{j=0}^{2n_x} W_j^{(c)} [\gamma_{j,t|t-1}^{(i)} - \bar{\gamma}_{t|t-1}^{(i)}][\gamma_{j,t|t-1}^{(i)} - \bar{\gamma}_{t|t-1}^{(i)}]^T \\ P_{x, \gamma} &= \sum_{j=0}^{2n_x} W_j^{(c)} [\chi_{j,t|t-1}^{(i)} - \bar{\chi}_{t|t-1}^{(i)}][\gamma_{j,t|t-1}^{(i)} - \bar{\gamma}_{t|t-1}^{(i)}]^T \end{aligned} \quad (17)$$

之后, 计算卡尔曼增益和 UKF 建议分布的均值和方程:

$$\begin{aligned} K_t &= P_{x, \gamma} P_{\gamma, \gamma}^{-1} \\ \hat{x}_t^{(i)} &= \bar{x}_{t|t-1}^{(i)} + K_t (y_t - \bar{y}_{t|t-1}^{(i)}) \\ \hat{P}_t^{(i)} &= P_{t|t-1}^{(i)} - K_t P_{\gamma, \gamma} K_t^T \end{aligned} \quad (18)$$

在获得建议分布的均值和方差后, 可以从  $N(\hat{x}_t^{(i)}, \hat{P}_t^{(i)})$  分布中抽取粒子。利用抽取粒子的数值分别构造  $p(y_k|x_k)$ 、 $p(x_k|x_{k-1})$  以及  $q(x_k|x_{0:k-1}, y_{1:k})$  并代入式(19)中, 计算粒子的权值。

$$w_k = \frac{p(y_{1:k}|x_{0:k})p(x_{0:k})}{q(x_k|x_{0:k-1}, y_{1:k})q(x_{0:k-1}|y_{1:k})}$$

$$= w_{k-1} \frac{p(y_k|x_k)p(x_k|x_{k-1})}{q(x_k|x_{0:k-1}, y_{1:k})} \quad (19)$$

在重采样阶段, 采用了改进的确定性重采样策略, 即将粒子按照权值大小进行排序, 对于权值较小的粒子不直接丢弃, 而是采用权值平稳化变异。首先计算权值的均值:

$$mean = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_t^{(i)} \quad (20)$$

对所有粒子按照权值由大到小顺序排列, 并按照相对于  $mean$  值的大小将粒子分为两类: 对于权值小于  $mean$  的粒子, 进行权值平稳化处理

$$\tilde{w}_t^{(i)} = w_{\max} \sqrt{\frac{w_t^{(i)}}{w_{\max}}} = \sqrt{w_{\max} w_t^{(i)}} \quad (21)$$

其中,  $w_{\max}$  为当前时刻小于  $mean$  值的粒子中权值最大粒子的权值。

将权值大于  $mean$  值的粒子权值和经过权值平稳化处理后的粒子权值合并为新的权值集合, 并进行归一化处理:

$$\tilde{w}_t^{(i)} = w_t^{(i)} / \sum_{j=1}^N w_t^{(j)} \quad (22)$$

根据  $\tilde{w}_t^{(i)}$  权重的相对大小, 从  $p(x_{0:t}^{(i)}|y_{1:t})$  中抽取  $N$  个独立同分布采样点  $x_t^{(i)}$ ; 最终的输出为各个粒子的平均值。

## 4 仿真实验

### 4.1 实验参数设定

测试函数 1:

$$x_t = 1 + \sin(0.04\pi(t-1)) + 0.5x_{t-1} + w_{t-1} \quad (23)$$

$$y_k = \begin{cases} 0.2x_k^2 + v_k & k \leq 30 \\ 0.5x_k - 2 + v_k & k > 30 \end{cases} \quad (24)$$

其中:  $w_t$  服从  $\gamma(3, 0.5)$  分布,  $v_k$  服从高斯分布  $N(0, 1e-4)$ 。

测试函数 2:

$$x_t = 1 + \sin(0.04\pi(t-1)) + 0.5x_{t-1} + w_{t-1} \quad (25)$$

$$y_k = 0.2x_k^2 + \cos(x_t)/10 + v_k \quad (26)$$

其中:  $w_t$  服从  $\gamma(3, 0.5)$  分布,  $v_k$  服从高斯分布  $N(0, 1e-4)$ 。

测试指标包括算法的均方误差 MSE 以及运行时间:

$$MSE = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\hat{x}_t - x_t)^2} \quad (27)$$

为了对提出的算法进行分析, 实验同时对 EKF、UKF、PF、PF-UKF 进行了仿真。对于参与实验的各种粒子滤波算法, 粒子数目  $N=100$ , 观测时间  $T=30$ , 进行独立 50 次实验。实验算法中  $R=1e-4$ ,  $Q=0.75$ ; UT 变换中,  $\alpha=1$ ,  $\beta=0$ ,  $k=2$ 。

### 4.2 实验结果

实验结果如图 1、图 2 以及表 1、表 2 所示。由于采

样点较多,并且各种算法实验数据较为接近,图中仅给出 PF、PF-EKF、PF-UKF 和 MPF 的实验结果。表中给出全部实验结果。

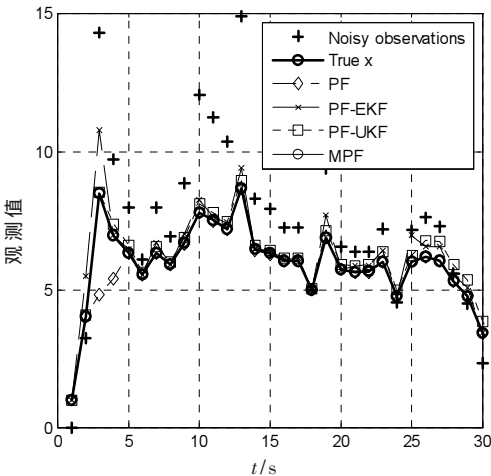


图 1 各种算法在测试函数 1 上的性能

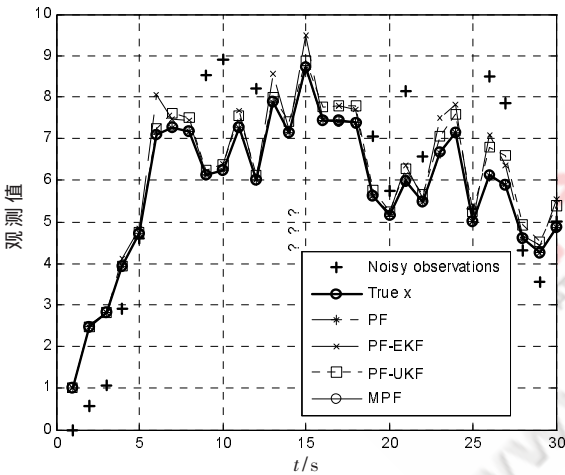


图 2 各种算法在测试函数 2 上的性能

表 1 各种算法在测试函数一上的性能

	MSE		MeanRunTime
	mean	variance	
EKF	0.707 5	0.114 38	-
UKF	0.224 4	0.122 797	-
PF	0.170 01	0.165 047	0.403 4
PF-EKF	0.171 26	0.214 57	5.179 2
PF-UKF	0.113 39	0.114 207	7.113 4
MPF	0.026 08	0.038 459	7.232 4

4.3 结果分析

由实验结果可以看出,参与实验的 6 种滤波算法中,EKF 和 UKF 的运行时间几乎可以忽略不计。在精确

表 2 各种算法在测试函数 2 上的性能

	MSE		MeanRunTime
	mean	variance	
EKF	0.330 75	0.114 38	-
UKF	0.244 7	0.132 797	-
PF	0.230 01	0.625 047	0.394 03
PF-EKF	0.311 81	0.114 57	5.179 2
PF-UKF	0.223 39	0.134 207	7.113 4
MPF	0.096 08	0.009 845 9	7.132 4

度方面 EKF 最差,其次是 UKF。而本文提出的 MPF 相对于其余 5 种算法有着更高的精确度。在运行时间方面,由于 MPF 是在 PF-UKF 基础上进行了权值平滑处理操作,因此运行时间略长于 PF-UKF。

本文提出了一种新的混合粒子滤波算法 MPF。仿真实验证明,MPF 相对于其他 5 种滤波算法有着更高的精确度。

参考文献

[1] MAYBECK P S. Stochastic models estimation and control[M]. New York: Academic, 1982.

[2] CALBALLERO G P, FUSTER S A. A wide family of non-linear filter function with a large linear span[J]. Information Science, 2003,164(1-4):197-207.

[3] LERRO D, BAR S Y K. Tracking with debiased consistent measurements vs. EKF [J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronics Systems, 1993,29(3):1015-1022.

[4] GORDON N J, SALMOND D J, SMITH A F M. Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation[J]. IEEE Proc Inst Elect Eng F, 1993,140(2):107-113.

[5] ARULAMPALAM M S, MASKELL S, GORDEN N, et al. A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-gaussian bayesian tracking[J]. IEEE Trans Signal Processing, 2002,50(2):174-188.

[6] DOUCET A, GODSILL S. On sequential monte carlo sampling methods for bayesian filtering[R]. Cambridge: University of Cambridge, 1998:1-36.

[7] PITT M K, SHEPHARD N. Filtering via simulation: Auxiliary particle filters [J]. Journal of the American Statistical Association, 1999,94(2):590-599.

[8] BERZUINI C, BEST N. Dynamic conditional independence models and markov chain monte carlo methods[J].J of the American Statistical Association, 1997,92(5):1403-1412.

(收稿日期:2009-05-06)