

# 基于稀疏分解的阵列幅相误差自校正\*

赵亮, 王建英

(西南交通大学 信息科学与技术学院, 四川 成都 610031)

**摘要:** 针对现实条件下普遍存在的阵元通道幅相误差对波达方向DOA(Directions of Arrival)估计的影响, 提出一种新的阵列误差自校正方法。该方法对接收信号进行稀疏分解, 结合遗传算法寻优, 可以精确估得信号源的波达方向, 同时估计出各阵元的幅相误差值。该方法适用于任意阵列形式, 在小于0 dB信噪比的情况下也能保持较好的估计准确性。计算机仿真验证了方法的有效性。

**关键词:** 稀疏分解; 波达方向估计; 幅相误差; 自校正

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

## Self-calibration with sensor gain and phase uncertainty based on sparsely decomposition

ZHAO Liang, WANG Jian Ying

(School of Information Science & Technology, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

**Abstract:** As the effect of sensor gain and phase uncertainties on estimation of DOA(Directions of Arrival), a new self-calibration method was presented. The method which combined signal sparsely decomposition and genetic algorithm provided estimation of the DOA of the radiating source as well as calibration of the gain and phase of each sensor in the observing array. The technique was not limited to a specific array configuration and provided high accuracy of DOA estimation under 0 dB circumstances. The computer simulation results show that the method is accurate and efficient.

**Key words:** sparsely decomposition; directions of arrival estimation; gain and phase uncertainties; self-calibration

辐射源波达方向估计是阵列信号处理的重要研究方向, 在通信、雷达、电子对抗领域有着广泛的应用。现有的超分辨测向方法通常都基于精确已知的阵列流形, 当阵列流形存在误差时, 其分辨性能会急剧下降<sup>[1]</sup>。在实际的天线系统中, 各阵元对应的通道包括高频放大、混频、解调等电路, 其对接收的信号存在幅度和相位的增益。理想情况下, 各阵元通道具有完全一样的幅度和相位增益。但在现实条件下, 由于各种因素的影响, 很难保证各阵元通道幅相增益的一致性, 这就导致了波达方向估计中通道幅相误差的产生。此类阵列误差导致估计的低鲁棒性, 一直以来都是高分辨空间谱估计技术走向实用化的一个瓶颈。20世纪90年代以后, 人们通过对阵列扰动进行建模, 将阵列误差校正逐渐转化为一个参数估计问题。参考文献[2]、[3]、[4]所述的信号子空间校正法、最大似然校正法、噪声

子空间拟合校正法分别通过构造不同的代价函数进行最优化解来得到阵元误差值及波达方向, 这些自校正算法不需要方位已知的辅助信源, 可以在线完成实际方位估计。但是其中子空间方法在阵元误差较大或信噪比较低时估计性能不好, 而最大似然法和噪声子空间拟合法则存在运算量大, 收敛速度慢的缺点。参考文献[5]提出一种辅助阵元法, 只需要参数一维搜索, 避免了通常参数联合优化估计的局部收敛问题, 但需要精确校正的辅助阵元。

本文将信号非正交分解思想<sup>[6]</sup>引入到阵列误差校正领域中, 建立过完备基函数系, 通过设置过完备库的原子向量密度, 将阵列接收信号投影到期望信号上, 实现阵列信号的稀疏表达, 进而对波达方向进行估计, 再在此基础上构造代价函数, 采用遗传算法寻优得到各阵元误差值, 通过这两个步骤的迭代, 实现阵列误差和波达方向的联合估计。该方法可以解释为最大似然法的改进, 通过阵列信号的稀疏分解找到其在各方向空间以及误差空间上的最大似

\*基金项目: 国家自然科学基金项目(60602043)

然估计, 与基于全局优化的最大似然法相比, 降低了算法的复杂度。该方法适用于任意阵列形式, 在信噪比较低时相比子空间类方法<sup>[4]</sup>具有更高的估计准确性。

### 1 问题描述

对于由无方向性阵元组成的任意几何结构的  $L$  元阵列, 在阵列远场处有  $D(D < L)$  个窄带点源以平面波入射(波长为  $\lambda$ ), 入射方向与阵列法线夹角为  $\theta_i (i=1, 2, \dots, D)$ 。以第一个阵元作为参考阵元, 在不考虑阵列阵元幅相误差的情况下, 阵列的导向矢量表示为:

$$a(\theta_i) = \left[ 1, \exp(-j\frac{2\pi}{\lambda}\tau_{i2}), \dots, \exp(-j\frac{2\pi}{\lambda}\tau_{iL}) \right]^T, i = 1, 2, \dots, D \quad (1)$$

$$\tau_{ij} = [x_j, y_j] [\sin(\theta_i) \cos(\theta_i)]^T, j=1, 2, \dots, L \quad (2)$$

其中  $\tau_{ij}$  为第  $i$  个信源相对于参考阵元到第  $j$  个阵元的波程差,  $[x_j, y_j]$  为第  $j$  个阵元的坐标。当阵列存在幅相误差时, 导向矢量为:

$$\tilde{a}(\theta_i) = \text{diag}(\Gamma) \cdot a(\theta_i) \quad (3)$$

$$\Gamma = [\rho_1 \exp(j\varphi_1), \rho_2 \exp(j\varphi_2), \dots, \rho_L \exp(j\varphi_L)] \quad (4)$$

其中  $\rho_j$  为第  $j$  个阵元的幅度增益,  $\varphi_j$  为第  $j$  个阵元的相位增益。

当以第一个阵元通道作为相位和幅度的基准时,  $\rho_1=1, \varphi_1=0$ 。阵列接收的快拍数据可表示为:

$$X(t) = \tilde{A}(\theta)S(t) + N(t) \quad (5)$$

$$\tilde{A}(\theta) = [\tilde{a}(\theta_1), \tilde{a}(\theta_2), \dots, \tilde{a}(\theta_D)]^T, X(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_L(t)]^T$$

$x_i(t)$  为第  $i$  个阵元接收到的数据,  $S(t)$  为入射信号复幅度矢量,  $N(t) = [n_1(t), n_2(t), \dots, n_L(t)]^T$ ,  $n_i(t)$  为第  $i$  个阵元中零均值且方差等于  $\sigma^2$  的高斯加性白噪声。

### 2 算法描述

传统的阵列信号处理方法往往是将信号分解在完备的正交基上, 如傅立叶变换。由于基的正交性, 使得基在由信号所组成的空间中的分布是稀疏的, 信号的能量在分解以后将分散分布在不同的基上。这种能量分布的分散最后将导致用基的组合表示信号时表达的不简洁, 即信号表示不是稀疏的, 不利于信号的处理, 如识别、压缩等。新的信号表示理论的基本思想是用称之为原子库的过完备冗余函数系统取代基函数, 原子库的选择尽可能地符合逼近的信号结构, 其构成可以没有限制。基的构造必须使得基在信号组成的空间中足够密, 基的正交性不再被保证, 所以此时的基也不再是真正意义上的基了, 称为原子。由这些原子组成的集合是过完备的, 称为过完备原子库。信号在过完备库上的分解结果一定是稀疏的<sup>[7]</sup>。阵列信号的稀疏分解针对阵列信号的空域或时频域特性建立过完备基函数系, 理论上可以通过设置过完备库的原子向量密度将阵列接收信号投影到任意逼近期望信号的基函数上, 实现阵列

信号的稀疏表达。并利用分解系数的特性得到感兴趣的信息<sup>[6]</sup>。

在进行阵列信号的波达方向估计时, 由阵列信号模型可知, 需要知道阵元间电波传播时延, 也就是阵元间的波程差  $\tau_{ij}$ , 该信息包含在式(1)所示的阵列导向矢量中。当阵列存在幅相误差时, 导向矢量  $A$  变为  $\tilde{A} = \text{diag}(\Gamma) \cdot A$ 。在已知空间分布信号  $S(t)$  的信息的情况下, 建立如式(6)所示的过完备向量原子库:

$$G \{a_i(\omega_0)\} = \text{diag}(\Gamma) \hat{\text{diag}} \begin{bmatrix} \exp(-j\omega_0\tau_{i1}/c) \\ \exp(-j\omega_0\tau_{i2}/c) \\ \vdots \\ \exp(-j\omega_0\tau_{iL}/c) \end{bmatrix} S(t) \quad (6)$$

式(6)中,  $i=1, 2, \dots, D$ 。下面以具体的均匀线阵为例, 则上式所示的原子库可表示成:

$$G \{a_i(\omega_0)\} = \text{diag}(\Gamma) \hat{\text{diag}} \begin{bmatrix} 1 \\ \exp(-j\omega_0 d \sin\theta_m/c) \\ \vdots \\ \exp(-j\omega_0(L-1)d \sin\theta_m/c) \end{bmatrix} S(t) \quad (7)$$

式中,  $m=1, 2, \dots, M$ ,  $\theta_m$  为要估计的波达方向参量, 按照需要的搜索精度均匀取值。  $M$  为角度参量搜索个数, 整个原子库的原子个数为  $M$  个。通过对波达方向参量  $\theta_m$  以及幅相误差矢量  $\hat{F} = [1 \ 2 \ \dots \ M]^T$  的搜索, 可以得到一个最逼近误差阵列信号导向矢量  $\hat{A}$  的原子向量, 此向量与信号方向及阵元存在的通道误差最为一致, 投影取得最大值。最佳原子选取的条件是阵列信号向量在方向导引向量张成的子空间上的投影最大化。由向量的投影理论可知, 投影最大也可表示为阵列信号向量与搜索向量空间的欧氏(Euclidean)距离最小。由此获得了原子参量  $m$  及幅相误差矢量  $\hat{F}$ 。由  $m$  即可获得阵列信号的波达方向估计。由于噪声不具有阵列信号的特征, 在与信号匹配的原子向量上投影接近零, 因此算法在低信噪比的情况下也能保持较好的估计性能。

定义代价函数为:

$$J = \text{norm} \left[ X(t) - \text{diag}(\Gamma) \hat{\text{diag}} \begin{bmatrix} 1 \\ \exp(-j\omega_0 d \sin\theta_m/c) \\ \vdots \\ \exp(-j\omega_0(L-1)d \sin\theta_m/c) \end{bmatrix} S(t) \right] \quad (8)$$

$m=1, 2, \dots, M$ , 式(8)中  $\text{norm}[\ ]$  为求矩阵的欧氏长度。当搜索的信号方向指向信号到达角  $\theta_n$  时,  $J$  取最小值, 此时对应的  $\hat{F}$  即为阵列的幅相误差。可以通过两个步骤的迭代来最小化代价函数  $J$ : 首先根据先验信息为阵列幅相误差选取初值, 在此基础上通过对波达方向  $\theta_m$  搜索得到使  $J$  最小的波达方向估计值  $\hat{\theta}_n$ ; 然后固定  $\hat{\theta}_n$ , 通过遗传算法最小化代价函数  $J$ , 得到阵列的幅相误差估计值  $\hat{F}$ 。通过这两步的迭代, 使代价函数  $J$  的当前值与上次值之差的绝对值小于设定的门限

时, 整个过程收敛。

在估计各阵元误差值时, 可选取阵元的幅相误差参数的级联 $[\rho_2\varphi_2\rho_3\varphi_3\dots\rho_L\varphi_L]$ 作为遗传个体,  $L$ 为阵元个数。考虑到需要估计的误差参数空间巨大, 在这里对幅度和相位误差分开进行估计。各阵元的误差变量所占二进制编码位数由式(9)得到。

$$n = \text{ceil}(\log_2(2 \cdot B / p)) \quad (9)$$

其中 $n$ 为二进制编码位数,  $B$ 为阵元幅度或相位位置误差可能的上下界绝对值,  $p$ 为要求的估计精度。

式(10)作为遗传算法使用的个体适应度函数, 其中 $C$ 为一常数。

$$Fit = C - J, \quad (C \geq J) \quad (10)$$

根据估得的阵元幅相误差值, 重新搜索波达方向 $\hat{\theta}_n$ , 重复以上步骤。通过这两步的迭代, 使代价函数 $J$ 的当前值与上次值之差的绝对值小于设定的门限时, 整个过程收敛。

算法流程总结如下:

- (1) $k=0$ , 根据先验信息设定误差的初始值 $\hat{\Gamma}^{(k)}$ ;
- (2)将 $\hat{\Gamma}^{(k)}$ 代入式(8)所示的过完备向量原子库, 搜索阵列信号 $X(t)$ 与原子向量的最小欧氏距离, 得到波达方向的粗略估计值 $\hat{\theta}_n^{(k)}$ ;
- (3)将 $\hat{\theta}_n^{(k)}$ 代入式, (8)得:

$$J^{(k)} = \text{norm} \left\{ X(t) - \text{diag}(\Gamma^{(k)}) \begin{bmatrix} 1 \\ \exp(-j\omega_0 d \sin \theta_n^{(k)} / c) \\ \vdots \\ \exp(-j\omega_0 (L-1) d \sin \theta_n^{(k)} / c) \end{bmatrix} S(t) \right\} \quad (11)$$

固定 $\Gamma^{(k)}$ 中的幅度, 用遗传算法对最小代价函数 $J^{(k)}$ 进行寻优, 得到对应的相位误差估计值, 再固定相位, 同样用遗传算法对幅度误差进行寻优, 从而得到幅相误差的估计值 $\hat{\Gamma}^{(k)}$ ;

- (4) $k=k+1$ , 返回第(2)步, 如此迭代直到代价函数 $J$ 的上次值与本次值之差的绝对值小于设定的门限。

### 3 算法仿真

仿真实验1: 单个正弦窄带信号从远场入射到6阵元均匀线阵, 方位角 $50^\circ$ , 阵元间距为半载波波长, 噪声为加性高斯白噪声, 信噪比 $SNR=10$  dB, 快拍数为256。每个阵元的幅度误差上下界为 $\pm 0.15$ (单位为1), 估计值精确到0.01。相位误差范围为 $0 \sim 1.2$ 弧度, 估计值精确到0.01弧度。根据式(9)知, 需用25 bit二进制编码表示各阵元的幅度误差, 用35 bit二进制码表示相位误差。搜索相位误差时, 遗传算法的初始种群规模为80, 进化代数为30, 交叉概率取0.5, 变异概率取0.02; 搜索幅度误差时, 遗传算法的初始种群规模为50, 进化代数为30, 交叉概率取0.5, 变异概率取0.02。通过6次交替求波达方向和阵列幅相误差的迭代

自校正算法收敛, 耗时12.791 00s, 算法运行环境为基于1.91GHz主频AMD Athlon 2600+的MATLAB7.0。得到的估计结果如表1所示, 表中幅度单位为1, 相位单位为弧度。

表1 幅相误差校正结果

阵元号	幅度真实值	幅度估计值	相位真实值	相位估计值
1	1.00	1.00	0	0
2	1.12	1.10	0.73	0.72
3	0.89	0.9	0.10	1.11
4	1.08	1.10	0.51	0.50
5	0.9	0.87	0.31	0.29
6	1.02	1.05	0.78	0.81

图1为随机选取的一次迭代过程中遗传算法最优个体的适应度收敛曲线。

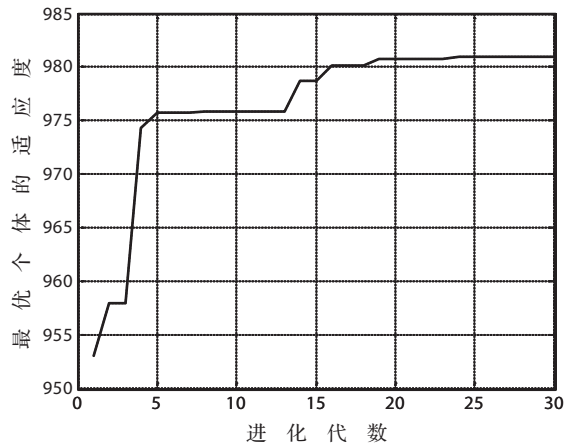


图1 最优个体收敛曲线

仿真实验2: 正弦窄带信号从 $50^\circ$ 角入射到6阵元均匀线阵, 各阵元幅度误差取 $\pm 0.15$ 内的随机值, 相位误差取 $0 \sim 0.4$ 弧度内的随机值, 快拍数为256次。图2所示为基于30次Monte-Carlo实验的波达方向估计随信噪比-10 dB~10 dB变化的RMSE曲线。从图中可以看出, 校正后的波达方向估计误差远远小于未经校正直接估计的误差, 另外在低信噪比条件下, 方向估计的误差也不大。

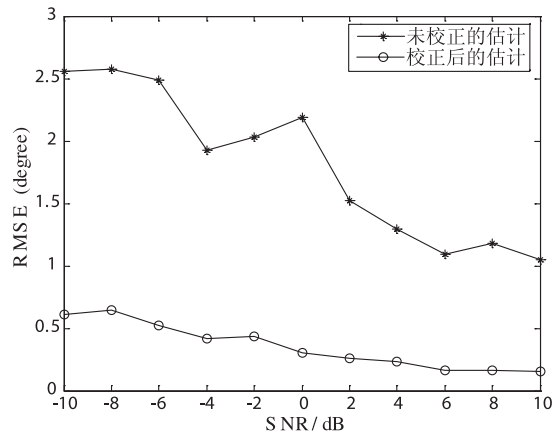


图2 DOA估计RMSE曲线

(下转第40页)

本文基于稀疏分解在信号波达方向估计应用中,可灵活根据具体阵列形式选择对应的过完备原子库,适应低信噪比环境的特性,结合遗传算法快速寻优,提出一种针对阵元通道幅相误差环境下的波达方向自校正方法。该方法方位估计精度高,对信噪比变化不敏感,在方位估计的同时可以精确估计出各阵元的幅相误差值,实现了误差和信号源方位的联合在线估计。为超分辨测向算法的实用化提供了一种有效的误差校正方法。

### 参考文献

- [1] 苏卫民, 顾红, 倪晋麟, 等. 通道幅相误差条件下MUSIC空间谱的统计性能[J]. 电子学报, 2001, 28(6): 105-107.
- [2] WEISS A J, FRIDELANDER B. Eigenstructure methods for direction finding with sensor gain and phase uncertainties[J]. Circuits, Syst. Signal processing, 1990, 9(3):271-300.
- [3] MCARTHUR D, REILLY J P. An efficient self-calibrating

direction-of-arrival estimator: Statistical Signal and Array Processing[C]. [S.l.]:[s.n.], IEEE Seventh SP Workshop on June 26-29, 1994: 129-132.

- [4] DAVID A, SWINDLEHURST A L. Spatial signature estimation for uniform linear arrays with unknown receiver gains and phase[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1999, 47(8):2128-2138.
- [5] 王布宏, 王永良, 陈辉. 方位依赖阵元幅相误差校正的辅助阵元法[J]. 中国科学E辑, 2004, 34(8): 906-918.
- [6] 王建英, 尹忠科, 张春梅. 信号与图像的稀疏分解及初步应用[M]. 成都: 西南交通大学出版社, 2006.
- [7] MALLAT S, ZHANG Z. Matching pursuits with time-frequency dictionaries[J]. IEEE Trans. Signal Process, 1993, 41:3397-3415.

(收稿日期: 2009-01-12)