

基于改进基追踪方法的信号去噪

汪雄良, 王春玲

(国防科技大学 理学院 数学与系统科学系, 湖南 长沙 410073)

摘要: 提出了一种新的基追踪求解算法。依据信号特性自适应地选取字典;通过 l_1 范数的近似表示,将有约束的极值问题转化为无约束问题,并利用一种新的迭代算法进行快速求解;几类典型信号实验结果验证了本方法具有良好的去噪效果。

关键词: 基追踪 字典 去噪

基追踪方法^[1]是信号稀疏表示领域的一种新方法。它寻求从完备的(过完备)函数(基)集合中得到信号的最稀疏的表示,即用尽可能少的基精确地表示原信号,从而获得信号的内在本质特性。基追踪方法采用表示系数的范数作为信号稀疏性的度量,通过最小化 l_1 范数将信号稀疏表示问题定义为一类有约束的极值问题,进而转化为线性规划问题进行求解。

目前,基追踪方法在一维信号处理领域有很好的应用。以 David L. Donoho 为代表的斯坦福大学统计系工作组利用基追踪方法在一维实信号去噪和超分辨率方面取得了很好应用的结果^[1-2]。尽管使用了一种新的线性规划算法——内点算法^[1],基追踪方法由于要在所有的字典向量中极小化一个全局目标函数,其计算量仍然是很大的^[3]。正因为求解大尺度线性规划问题的困难,目前的基追踪方法局限于一维的信号去噪和超分辨率处理。本文提出一种新的思路来求解上述有约束的极值问题。首先依据信号特性自适应地选取字典;通过 l_1 范数的近似表示,将有约束的极值问题转化为无约束问题,并利用一种迭代算法进行快速求解;最后通过几类典型信号去噪实验来验证本文方法的应用效果。实验结果表明,改进的基追踪方法能够快速稳定实现,同时具有良好的去噪效果。

1 字典的构造

对于观测到的离散信号 $s \in H$, H 为 Hilbert 空间,给定 H 中的字典 $\phi = \{\phi_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$, 其中 Γ 为指标集, ϕ_γ 为 H 中的基函数,也称为原子。基追踪方法将信号稀疏表示问题定义为以下有约束的极值问题^[1],即

$$\min \|\alpha\|_1 \text{ subject to } s = \sum_{\gamma \in \Gamma} \alpha_\gamma \phi_\gamma \quad (1)$$

其中, $\alpha_\gamma (\gamma \in \Gamma)$ 为表示系数。如果将字典中的向量表示成矩阵 ϕ 的列,系数表示成一个列向量,则(1)式可表示成

$$\min \|\alpha\|_1 \text{ subject to } s = \phi \alpha \quad (2)$$

在含噪观测的情况下,考虑如下模型:

$$y = s + \sigma z$$

其中 s 为真实信号, y 为观测信号, z 为标准高斯白噪声, σ 为噪声根方差。基追踪方法去噪归结为求解以下优化问题^{[1][5]}:

$$\min_{\alpha} \frac{1}{2} \|y - \phi \alpha\|_2^2 + \lambda \|\alpha\|_1 \quad (3)$$

以上最优化问题致力于最小化信号重建误差,同时使得信号的表示最稀疏。正则化参数 λ 控制着允许误差与稀疏性之间的平衡。

由(3)式可见,基追踪方法去噪的核心问题涉及到原子的选取、字典的构造、求解算法设计等三个方面。其中,字典的构造是基追踪方法的重要环节。为了尽可能精确地表示信号,字典与信号应该是自适应的,或者说字典是从信号的学习中得到的。通常,基追踪方法所使用的字典有完备的、过完备的、欠完备的等。可以根据信号的先验信息及实际需要设计字典。一般设计的字典是完备或过完备的。对于简单信号去噪,一般只需构造完备的字典。对于复合信号去噪问题,通常需要构造过完备的字典。对于完备字典,同样存在信号的稀疏表示问题,因为噪声总是处处奇异的^[4]。本文所采用的字典主要有:

(1) Heaviside 字典

$$\gamma \in \{1, 2, \dots, n\}, \phi_r(t) = 1_{\{t \geq r\}}$$

$$\Rightarrow \phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

此字典中原子不是正交的,但是对于任意长度为 n 的一维离散信号 $s = (s_1 \ s_2 \ \cdots \ s_n)$ 都有以下表示:

$$s = s_1 \phi_1 + \sum_{\gamma=2}^n (s_\gamma - s_{\gamma-1}) \phi_\gamma$$

Heaviside 字典具有上三角形,结构简单,善于捕捉分片常数信号中的突变特征。

(2) 时间-尺度字典 (小波字典)

以 Haar 小波字典为例:

父小波基: $\varphi=1_{[0,1]}$, 母小波基: $\psi=1_{[1/2,1]}, 1-1_{[0,1/2]}$

Haar 小波字典中包含母小波基的平移和伸缩变换以及父小波基的平移变换。

设 $\gamma=(a,b,v)$, 其中 $a \in (0, \infty)$ 为尺度变量, $b \in [0, n]$ 表征位置, $v \in \{0, 1\}$ 表征性别。Haar 小波字典形式为:

$$\phi_{(a,b,1)}=\psi(a(t-b)) \cdot \sqrt{a} \quad \phi_{(a,b,0)}=\varphi(a(t-b)) \cdot \sqrt{a}$$

对于完备的 Haar 小波字典而言, 指标集

$$\Gamma_{\text{Haar}}=\left\{\begin{aligned} &(a_j, b_{j,k}, 1): j=j_0, \dots, \log_2(n)-1, k=0, \dots, 2^j-1; \\ &(a_{j_0}, b_{j_0,k}, 0): k=0, \dots, 2^{j_0}-1 \end{aligned}\right\}$$

包含 n 个原子, 构成一组正交基。当然还有其它类型的小波字典, 尽管有些小波基没有类似 Haar 小波基这样明确的小波函数表达式, 但它们的字典都有与 Haar 小波字典类似的离散结构。比较常用的主要有 Daubechies、Coiflet、Symmlet 等^[1]。小波字典适用于表示分片光滑信号。

(3) Heaviside 字典+小波字典

对于比较复杂的复合信号, 单一的字典下无法得到信号的最稀疏表示, 此时可将几种字典合成, 从而得到过完备的字典。例如 Heaviside 字典+小波字典。

2 新的求解算法

文献[1]将(3)式等价于如下二次规划问题:

$$\min c^T x + \frac{1}{2} \|p\|^2 \quad \text{subject to } A x + \delta_p = b \quad x \geq 0, \delta = 1$$

其中, $\alpha \equiv u-v, u, v \geq 0, x \Leftrightarrow (u, v), A \Leftrightarrow (\phi, -\phi), c \Leftrightarrow \lambda(1, 1), b \Leftrightarrow y$ 。

文献[1]采用内点算法求解以上二次规划问题。这种算法收敛性能稳定, 但由于它是一种大尺度的线性规划算法, 复杂度高, 所耗费的计算时间非常长, 不便于实际应用。为此, 针对(3)式, 采用一种新的迭代算法来求解以上最优化问题。

首先, 给出 l_1 范数的平滑近似^[5]

$$\|z\|_1 \approx \sum_{i=1}^N (|z_i|^2 + \varepsilon)^{1/2} \quad (8)$$

其中, N 为向量 z 的长度, ε 为非常小的常数 ($\varepsilon > 0$), 本文取 $\varepsilon=10^{-6}$ 。

$$\begin{aligned} \text{令 } J(\alpha) &= \frac{1}{2} (y - \phi\alpha)^H (y - \phi\alpha) + \lambda \sum_{i=1}^N (|\alpha_i|^2 + \varepsilon)^{1/2} \quad (9) \\ &= \frac{1}{2} (y^H y - y^H \phi\alpha - \alpha^H \phi y + \alpha^H \phi^H \phi \alpha) + \lambda \sum_{i=1}^N (|\alpha_i|^2 + \varepsilon)^{1/2} \end{aligned}$$

由 $\nabla J(\alpha)=0$, 得到

$$(\phi^H \phi + \lambda \Lambda_1(\alpha)) \alpha = \phi^H y \quad (10)$$

其中, $\Lambda_1(\alpha) = \text{diag}(|\alpha_i|^2 + \varepsilon)^{-1/2}$ 。迭代求解(10), 迭代式如下:

$$\hat{\alpha}^{(n+1)} = \beta (\phi^H \phi + \lambda \Lambda_1(\hat{\alpha}^{(n)}))^{-1} \phi^H y + (1-\beta) \hat{\alpha}^{(n)} \quad (11)$$

其中, β 为迭代步长, $0 < \beta \leq 1$, 迭代初值可取 $\hat{\alpha}^{(0)} = \phi^H y$ 。迭代的终止条件由 $\left\| \hat{\alpha}^{(n+1)} - \hat{\alpha}^{(n)} \right\|_2 / \left\| \hat{\alpha}^{(n)} \right\|_2 < \delta_{CC}$ 控制

(本文取 $\delta_{CC}=10^{-3}$), 这样即可得到优化问题的解 $\hat{\alpha}$ 。在得到表示系数 α 的估计 $\hat{\alpha}$ 后, 可由 $\hat{s} = \phi \hat{\alpha}$ 得到重构的信号。

3 正则化参数 λ 的选取

在所考虑的噪声为高斯白噪声以及对字典 ϕ 进行规范化 ($\|\phi_\gamma\|_2 = 1$) 的情况下, 文献[1]中 λ 的经验值取为 $\lambda = \sigma \sqrt{2 \log(P)}$, 其中, P 为字典 ϕ 的势。此经验值实际对应于正交基下小波去噪方法的软阈值^{[1][6]}。因此这种参数的选取方法依赖于对信号中的噪声方差的精确估计。而对噪声方差的精确估计通常是比较困难的。因此该经验值是一种次优值。可从另一个角度来考虑正则化参数的选取方法。容易证明, 在对字典 ϕ 进行正交化后, 目标函数具有单峰性质 (目标函数为凸函数), 因此可通过最小化目标函数, 在迭代算法中用线性搜索的方法寻求最优。

4 实验结果

为了验证本方法的去噪效果, 将其应用于一维信号去噪实验, 并与小波软、硬阈值去噪方法以及 Wiener 滤波方法进行了比较。

设计二组一维实信号, 即分片常数信号和分片光滑信号。其中分片光滑信号“Heavisine”是由下式产生的一种信号:

$$x(n) = 4 \sin\left(\frac{n\pi}{64}\right) - \text{sign}\left(\frac{n}{256} - 0.3\right) - \text{sign}\left(0.72 - \frac{n}{256}\right), \quad n=0, 1, 2, \dots, 255 \quad (12)$$

对二组信号附加高斯白噪声。其中第一组噪声根方差 $\sigma=0.2$, 第二组噪声根方差为 $\sigma=0.5$ 。去噪结果如图 1 和图 2 所示。分片常数信号实验中的小波方法所采用的小波基为 Haar 小波基, 分片光滑信号实验中的小波方

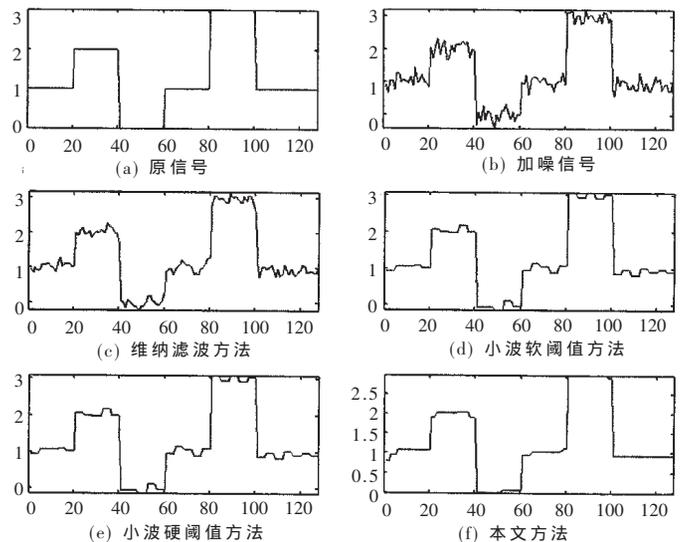


图 1 一维分片常数信号去噪结果

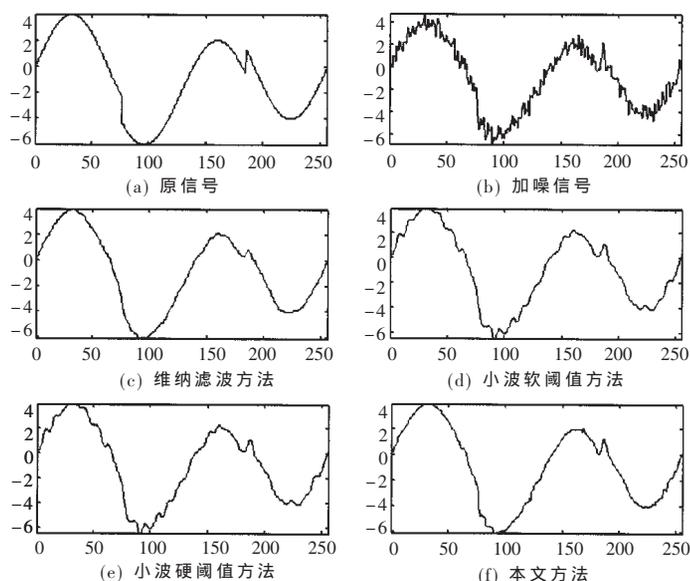


图2 一维分片光滑信号“Heavisine”去噪结果

表1 信噪比的比较结果

SNR	含噪信号	Wiener 滤波	小波软阈值方法	小波硬阈值方法	本文方法
分片常数信号	18.33 dB	22.02 dB	24.91dB	24.03dB	25.99dB
分片光滑信号	16.13 dB	22.41 dB	21.78dB	21.75dB	24.69dB

法所采用的小波基为 Sym8 小波基。依据信号的特性,分片常数信号实验中基追踪方法采用 Heaviside 完备字典,分片光滑信号实验中基追踪方法采用 Heaviside+Sym8 小波字典合成的过完备字典。表1对各种方法的信噪比改

善程度进行了比较。在配置为奔4 Celeron(1.8G)微机上运行未经优化的 Matlab 程序,分片常数信号实验总过程耗时约 9s,分片光滑信号实验总过程耗时约 80s。

理论分析和实验结果表明,该方法能够快速稳定实现,同时具有良好的去噪效果。与传统去噪方法相比,基追踪方法对于信噪比的改进程度更高,同时它能有效地保持信号中的重要特征。

参考文献

- 1 S.Chen, Donoho, D.L., Saunders M.A. Atomic Decomposition by Basis Pursuit. SIAM J.Sci.Comp.,1999;20(1):33~61
- 2 D. L.Donoho, Michael Elad. Optimally Sparse Representation in General Dictionaries via l_1 Minimization, PNAS, 2003; 100(5):2197~2202
- 3 Mallat,S.著,杨力华译. 信号处理的小波导引. 第二版. 北京:机械工业出版社,2002:319~320
- 4 傅 霆,尧德中.稀疏分解的加权迭代方法及其初步应用. 电子学报.2004;32(4):567~570
- 5 Mujdat Cetin, Dmitry M.Malioutov, Alan S. Willsky.A variational technique for source localization based on a sparse signal reconstruction perspective. Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Orlando, FL,May 2002
- 6 D. L. Donoho.De-noising by Soft Thresholding,IEEE Transactions on Information Theory,1995; (41):613~627

(收稿日期:2005-03-03)