

基于四元数的全速率满发射分集正交空时分组码

张磊¹, 刘晓阳², 王卫义³

(1. 北京邮电大学 93 信箱, 北京 100876; 2. 济南职业学院, 山东 济南 250103;
3. 鲁证期货经纪有限公司, 山东 济南 250012)

摘要: 介绍了一种改进的 4×4 全速率满发射分集的正交空时分组码 (Modified O-STBC) 方法, 其中的编码矩阵由 4 个 2×2 的 Alamouti 编码矩阵构成, 而每个 Alamouti 编码矩阵可以看作是由一个四元数构成的, 其可以表示三维空间 R^3 中向量的旋转。对于 QPSK 和 8PSK 调制来说, 调制信号的取值来自于二十面体群中的元素。该 MO-STBC 码在发射端可以实现全速率满发射分集, 而没有引起调制星座点的增加。利用四元数的结构, 接收端使用了一种计算复杂度较低的译码方法, 而性能接近最大似然译码。

关键词: 四元数 二十面体群 空时分组码 分集

A full-rate full-diversity orthogonal space-time block coding scheme based on quaternion

ZHANG Lei¹, LIU Xiao Yang², WANG Wei Yi³

(1. Beijing University of Posts and Telecommunications Po.Box 93, Beijing 100876, China;
2. Jinan Vocational College, Jinan 250103, China;
3. Lu Zheng Futures Broker co, Ltd, Jinan 250012, China)

Abstract: This paper introduces a modified full rate, full diversity orthogonal space-time block code (MO-STBC) for 4 transmit antennas. The codeword matrix consists of four 2×2 Alamouti blocks, and these blocks can be viewed as quaternions which in turn represent rotations in. The Alamouti blocks that appear in a codeword are drawn from the icosahedral group. The code is no constellation expansion unlike some full-rate full-diversity codes in the literature. By utilizing the quaternionic form, we can find the decoding algorithm to reduce the complexity of maximum likelihood (ML) coherent decoding.

Key words: quaternion; the icosahedral group; STBC; diversity

随着移动技术的不断发展, 人们对传输速率和稳定性提出了越来越高的要求。近年来, 作为一种简单有效的传输分集方式, 空时编码技术得到了广泛的关注^[1]。正交空时分组码 (O-STBC) 可以在接收端进行简单的最大比合并解码, 并实现全分集增益。但复数域正交空时分组码在发射天线数较大 ($N > 2$) 时, 不可能达到全速率传输^[2-3]。为获得更高的传输速率, 参考文献[4]提出了准正交空时分组码 (QO-STBC), 牺牲一定的分集增益以获得全速率容量。参考文献[5]通过调制星座的旋转达到满发射分集, 然而星座的旋转增加了发射端的调制星座的数量。Viterbo 和 Oggier 提出了一种基于数论的非正交空时码^[6], 利用代数理论可以实现全速率和满发射分集。参考文献[7]介绍了一种基于四元数的空时分组码, 只考虑了 QPSK 调制下的情况。

本文利用群论和四元数的理论分析了一种全速率满发射分集的正交空时分组码 (MO-STBC)。MO-STBC 可表示为一个 4×4 的复数矩阵, 即在发射端占用 4 根天线和 4 个编码周期。每个编码矩阵是由 4 个基于四元数的 2×2 Alamouti 空时分组码组成, 其编码矩阵在复数域是正交的但其译码是非线性的。因为对四元数来说, 它自身不满足乘法交换率。而当编码矩阵中的四元数用复数来代替时, 该矩阵就退化为 Alamouti 编码矩阵。在 QPSK 和 8PSK 的调制方式中, 信号经过空时编码后并没有引起调制星座的增加, 而且利用四元数的结构实现了一种复杂度低的译码方法。

1 系统模型和代数理论

1.1 系统模型

本文假设信道为准静态瑞利衰落信道, 信道在若干

个符号周期内保持恒定,而在不同的信道周期之间完全独立。考虑的是 N_t 根发射天线和 N_r 根接收天线 T 个符号周期的 MIMO 系统,接收天线信号矩阵为:

$$\mathbf{R}=\mathbf{H}\mathbf{X}+\mathbf{N} \quad (1)$$

式中 \mathbf{H} 为 $N_r \times N_t$ 的准静态衰落信道矩阵, $\mathbf{H}=\{h_{ij}(t)\}_{N_r \times N_t}$, $h_{ij}(t)$ 为从第 i 根发射天线到第 j 根接收天线的信道衰落系数。信道矩阵中各元素均为统计独立的零均值单位方差复高斯随机变量,其幅值服从瑞利分布。 \mathbf{X} 为 N_t 根天线的空时编码发射符号块 $\mathbf{X}=\{x_{it}\}_{N_t \times T}$, x_{it} 为 t 时刻第 i 根发射天线的符号。 \mathbf{N} 为 $N_r \times T$ 统计独立的零均值复高斯噪声矩阵,各元素的方差为 σ^2 。

1.2 四元数

四元数最早被数学家 Hamilton 所提出,其可以认为是基于三维空间 R^3 上的复数。四元数可表示为 $q=\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k$, 其中 α 表示四元数的实部, $\beta i+\gamma j+\delta k$ 表示四元数的虚部,所以四元数可以看作是复数的一种扩展。其中 i, j, k 的关系,可以表示为:

$$\begin{aligned} i^2=j^2=k^2 &= -1 \\ ij &= k = -ji \\ jk &= i = -kj \\ ki &= j = -ik \end{aligned} \quad (2)$$

四元数 q 的共轭满足 $\bar{q}=\alpha-\beta i-\gamma j-\delta k$, 而四元数 q 的标准范数为 $N(q)=q\bar{q}=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$ 。当 $N(q)=1$ 时,称为单位四元数。四元数通过变换后可以表示为两个复数的加和:

$$q=\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k=\alpha+\beta i+\gamma j+\delta ij=(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)j=v+wj \quad (3)$$

四元数 q 可以写成 Alamouti 编码矩阵的形式:

$$q=\begin{bmatrix} v & w \\ -\bar{w} & \bar{v} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha+\beta i & \gamma+\delta i \\ -\gamma+\delta i & \alpha-\beta i \end{bmatrix} \quad (4)$$

根据四元数的性质,乘以四元数就相当于乘以 Alamouti 编码矩阵。

对于一个单位四元数,其在三维空间向量 R^3 的旋转可以写成如下形式:

$$Rot(b)=\bar{a}ba \quad (5)$$

单位四元数 b ,以单位四元数 a 为轴绕其旋转。经过旋转后,四元数 b 的实数部分不变,而只改变虚数部分。在这里设 $Rot(a)$ 绕单位四元数 a 旋转的角度为 2θ ,则 $\cos(\theta)=a_0$, $\sin(\theta)=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$ 。要想了解更多四元代数的理论,可以查阅参考文献[8][9]。

1.3 二十面体群

定义:二十面体群为一个满足乘法运算的有限点群,其中包含了二十面体和二十面体上的顶点。群里包含了 120 个这样的顶点,其中每个点可以用四元数的形式表示^[9]:

$$(\pm 1, 0, 0, 0)^E, \frac{1}{2}(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)^E, \frac{1}{2}(0, \pm 1, \pm \delta, \pm E)^E,$$

这里 $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ 表示为 $\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k$, $\sigma=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\tau=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$,

其中上标 E 表示群中元素的坐标点经过偶置换后仍属于该群。

对于一个四元数 $q=\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k$, 其中坐标点 $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ 属于二十面体群。本文在 MO-STBC 中用到的四元数都来自于二十面体群。

2 基于四元数的空时编码结构

本文中的正交空时分组码(MO-STBC)为:

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix} A & B \\ \frac{\bar{A} \bar{B} A}{\|A\|^2} & -\bar{A} \end{bmatrix}$$

\mathbf{X} 为 4×4 的正交分组空时码,其中的元素 $A, B, \frac{\bar{A} \bar{B} A}{\|A\|^2}$ 都是采用 Alamouti 编码矩阵。证明编码矩阵 \mathbf{X} 为正交矩阵:

$$\mathbf{X}\bar{\mathbf{X}}=\begin{bmatrix} A & B \\ \frac{\bar{A} \bar{B} A}{\|A\|^2} & -\bar{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{A} \bar{B} A \\ \bar{B} & -A \end{bmatrix}=(\|A\|^2+\|B\|^2)I \quad (6)$$

其中 $\bar{\mathbf{X}}$ 代表了 \mathbf{X} 的 Hermite 转置,经过以上运算可以证明该编码矩阵各行之间是正交的。四元数是一个对于矩阵的加法和乘法都封闭的代数群。该代数群不满足乘法交换率,所以说不存在基于四元数的 4×4 编码矩阵同时满足行列都正交。

本文所提到的正交空时分组码(MO-STBC),发射端的调制符号都来自于二十面体群。在相同的调制星座中选取不同的四元数 A 和 B 来代表不同的发射信号。由于一个四元数可以表示成一对复数,所以两个四元数可以表示为四个复数。而每次编码为 4 个符号周期,所以编码后的速率为 1。这里假设发射端调制星座点的大小为 n 。由于每个四元数可以表示为一对复数,则发射信号的组合方式就可能有 n^2 种。例如,在 QPSK 的调制方式下, A 和 B 的值从元素 $\frac{1}{2}(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)^E$ 中选取,该集中正好有 $n^2=16$ 的选取方式。在 8PSK 的调制方式下,发射信号有 $8^2=64$ 种选取方式,其调制符号从元素 $\frac{1}{2}(0, \pm 1, \pm \sigma, \pm \tau)^E$ 中选取。图 1 和图 2 说明在 QPSK 和 8PSK 下的调制星座图,其中每个星座点代表的是四元数中的一个复数。在 QPSK 和 8PSK 中,调制信号的点都来自于二十面体群,而二十面体群是一个乘法群,所以 $\frac{\bar{A} \bar{B} A}{\|A\|^2}$ 也属于该群,并没有增加调制星座点的数量。在调制过程中,可以通过查表来建立调制信号点和对应四元数的关系。

3 接收端译码算法

本文所介绍的 MO-STBC 在接收端进行最大似然解调(Maximum Likelihood decoding)。根据最大似然准则解

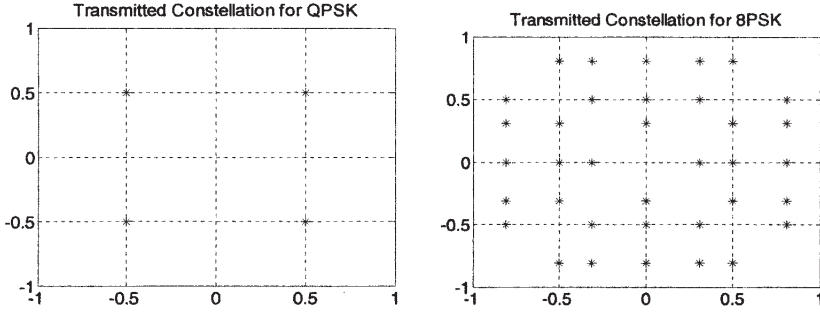


图 1 QPSK 和 8PSK 调制星座图

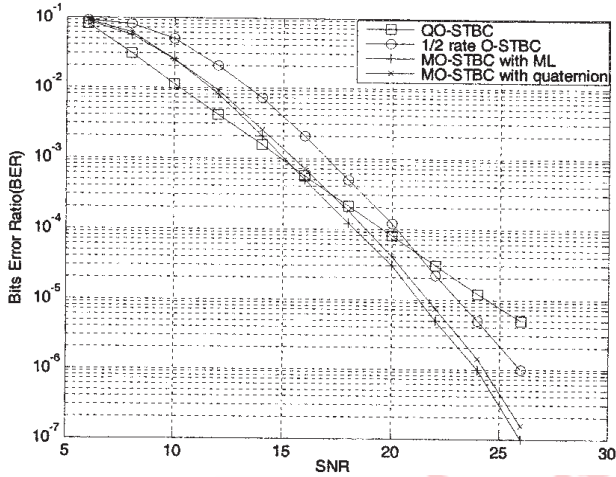


图 2 2b/s/Hz 的 STBC 误比特性能

调出原始信号:

$$\hat{X} = \arg \min \| R - HX \|^2 \quad (7)$$

等式(7)中的发射端用空时编码矩阵来代替,可以表示为:

$$\{\hat{A}, \hat{B}\} = \arg \min_{A, B} \left\| R - H \begin{bmatrix} A & B \\ \overline{A} \overline{B} A & -\overline{A} \end{bmatrix} \right\|^2 \quad (8)$$

其中 \hat{A}, \hat{B} 是 A, B 的最大似然解码的估计值。对于 2×2 的 Alamouti 码和更高阶的 O-STBC 来说,有复杂度低的最大似然译码方法,其在接收端可以通过线性运算分离不同天线上的数据流。对于 MO-STBC 由于其采用的四元数不满足乘法交换律,所以不能采用传统的空时编码最大似然译码方法。而普通的最大似然译码,其算法的复杂度与调制星座的大小呈指数关系,从而限制了它 在高阶调制中的应用。

本文利用四元数本身的结构特点,介绍了一种复杂度低的解码方法,其性能接近最大似然解码。经过平坦衰落信道,4发1收的系统模型为:

$$[r_1 \ r_2 \ r_3 \ r_4] = [h_1 \ h_2 \ h_3 \ h_4]X + [n_1 \ n_2 \ n_3 \ n_4] \quad (9)$$

利用四元数的矩阵形式来表示系统模型:

$$[R_{12} \ R_{34}] = [H_{12} \ H_{34}] \begin{bmatrix} A & B \\ \frac{\overline{A} \overline{B} A}{\|A\|^2} & -\overline{A} \end{bmatrix} + [N_{12} \ N_{34}] \quad (10)$$

其中 $R_{12} = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 \\ -r_2 & r_1 \end{bmatrix}$, 而 $R_{34}, H_{12}, H_{34}, N_{12}, N_{34}$ 的表示形式与 R_{12} 类似。展开(10)式得:

$$R_{12} = H_{12} A + H_{34} \frac{\overline{A} \overline{B} A}{\|A\|^2} + N_{12} \quad (11)$$

$$R_{34} = H_{12} B - H_{34} \overline{A} + N_{34} \quad (12)$$

利用四元数 q 以及共轭 \bar{q} 来分离四元数的实部和虚部。其中实部可以表示为:

$$q + \bar{q} = 2Int(q) \quad (13)$$

虚部可以表示为:

$$q - \bar{q} = 2Irr(q) \quad (14)$$

A, B 可分别写成四元数形式: $a = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k, b = b_0 + b_1i + b_2j + b_3k$ 。 $R_{12}, R_{34}, H_{12}, H_{34}, N_{12}, N_{34}$ 对应的四元数形式: $r_{12}, r_{34}, h_{12}, h_{34}, n_{12}, n_{34}$ 。对等式(11)和(12)利用线性变换来分离发射信号的实部。

$$\begin{aligned} \tilde{r}_1 &= h_{12} \tilde{r}_{34} + r_{12} \tilde{h}_{34} \\ &= h_{12} \overline{b} h_{12} + h_{34} \frac{\overline{a} b a}{\|a\|^2} \tilde{h}_{34} + h_{12} \underbrace{\tilde{n}_{34} + n_{12} \tilde{h}_{34}}_{\tilde{n}_0} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} Int(\tilde{r}_1) &= Int(h_{12} \tilde{r}_{34} + r_{12} \tilde{h}_{34}) \\ &= (\|h_{12}\|^2 + \|h_{34}\|^2) b_0 + Int(\tilde{n}_0) \end{aligned} \quad (16)$$

其中 $Int(\tilde{r}_1), Int(\tilde{n}_0), b_0$ 表示对应四元数的实部。对等式(16)同除以 $\|h_{12}\|^2 + \|h_{34}\|^2$, 然后对等式的左边进行硬判决可以得到 b_0 的估计值。确定 b_0 的值后,就可以减少四元数 b 的调制信号可能的取值。设 b_m 是减少以后信号取值的组合, a_m 代表 a 信号所有可能取值的组合。对信号的组合 (a_m, b_m) 利用最大似然(ML)解码,得到信号的似然解 (\hat{A}, \hat{B}) 。对于 QPSK 来说,对 b_0 进行硬判决是很容易的。而对于 8PSK 来说,各点之间距离很近,直接硬判决是很困难的。在这里选取距离最近的 3 个点为 b_0 的估计值,得到减少的信号组合 (a_m, b_m) 进行最大似然解码。

4 仿真结果

对本文所提出的全速率满发射分集空时编码 (MO-STBC) 的性能给出了仿真曲线。其中图 1 是 QPSK 和 8PSK 的调制星座图。在星座图上,每个星座点代表了四元数中的一个复数。图 2 给出了在 4 根发射天线和 1 根接收天线, QPSK 调制频率利用率为 2b/s/Hz 的仿真曲线,其中包括 MO-STBC, 准正交空时分组码(QO-STBC), 基于 16QAM 调制的 1/2 速率的正交空时分组码(O-STBC)。图 3 给出的是基于 8PSK 调制频率, 利用率为 3 bits/s/Hz 的仿真曲线,其中包括了 MO-STBC、QO-STBC 和基于 16QAM 调制的 3/4 速率的 O-STBC。

从图 2 和图 3 的仿真结果来看,在低信噪比的情况下,MO-STBC 性能接近于 QO-STBC,要好于速率为 1/2 和 3/4 的 O-STBC。在高信噪比下,基于四元数的空时分

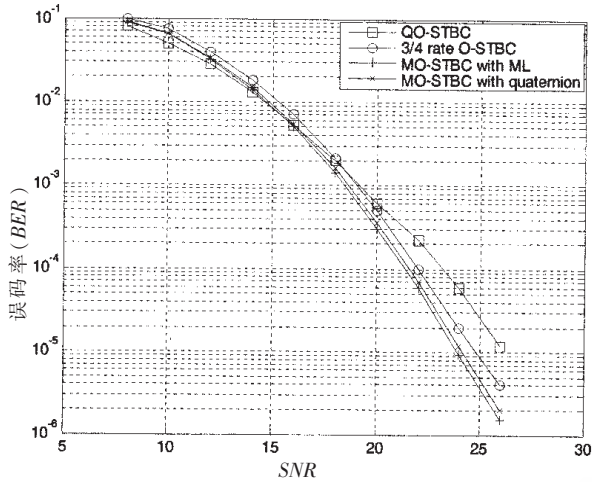


图 3 3b/s/Hz 的 STBC 误比特性能

组码(MO-STBC)具有比 QO-STBC 和速率 1/2、3/4 的 O-STBC 更低的误比特率。相比较于 QO-STBC 只能实现部分发射分集,MO-STBC 可以实现满发射分集,所以有较低的误码率。而相对于 1/2、3/4 的 O-STBC 来说,MO-STBC 具有较低的调制阶数,因而有较好的性能,接收端使用复杂度低的解码方法而性能同最大似然解码方法基本一致。

本文介绍了一种全新的 4×4 全速率满发射分集的正交空时分组码,其结构基于四元数理论和二十面体群。MO-STBC 在 QPSK 和 8PSK 调制下,可以实现全速率和满发射分集而没有带来调制星座点的增加。其中利用四元数的结构提出了一种接近最大似然译码性能而计算复杂度较低的译码方法。

参考文献

- [1] ALAMOUTI M. A simple transmit diversity technique for wireless communications. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 1998, 16(8):1451-1458.
- [2] TAROKH V, JAFARKHANI H, CALDERBANK A R. Space-time block codes from orthogonal designs. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1999:1456-1467.
- [3] TAROKH V, SESHADRI N, CALDERBANK A R. Space-time codes for high data rate wireless communications: performance criterion and code construction. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1998, 44(2):744-765.
- [4] JAFARKHANI H. A quasi-orthogonal space-time block code. *IEEE Communications Letters*, 2001:1-4.
- [5] SHARMA N, PAPADIAS C. Improved quasi-orthogonal codes through constellation rotation. *IEEE Transactions on Communications*, 2003:332-335.
- [6] VITERBO E, OGGIER F. Algebraic number theory and code design for rayleigh fading channels. *Foundation and Trend in Communication and Information Theory*, Now Publishers Inc, 2005.
- [7] CALDERBANK R, DAS S, N. Al-Dhahir, et al. A novel full-rate full-diversity STBC with Application to WiMAX. *Vehicular Technology Conference, VTC-2005-Fall*, 3: 1791-1795.
- [8] ALBERT A A. *Structure of algebras*. AMS Colloquium Pub. XXIV, 1961, AMS, Providence.
- [9] CONWAY J H, SLOANE N J A. *Sphere packings, Lattices and Groups*. New York: Springer-Verlag, 1988.

(收稿日期:2007-05-09)