

交流信号采样离散计算公式

赵永胜, 丛培建, 赵正聪

(烟台东方威思顿电气有限公司, 山东 烟台 264000)

摘要: 提出了交流信号的电压有效值、电流有效值、有功功率的离散计算公式, 并给出了严格的数学证明, 分别得出了有效值和有功功率计算中每周波最少采样点数。

关键词: 离散计算公式 每周波最少采样点数

Alternating current signal sampling discrete computing formula

ZHAO Yong Sheng, CONG Pei Jian, ZHAO Zheng Cong

(Yan Tai Dongfang wisdom electric co. Yantai 264000, China)

Abstract: In this article, the discrete computing formulas of AC voltage rms value, AC current rms value, active power are given with the strict mathematics derivation, the minimum sampling time per cycle is given dividedly in rms value and active power calculation.

Key words: discrete computing formula; the minimum sampling time per cycle

由电工学基本知识很容易得到交流信号有效值和有功功率的计算公式^[1], 那么其离散计算公式是什么样的呢? 根据抽样定理^[2], 对有限带宽连续信号, 若抽样频率大于等于信号最高频率, 则可由离散采样值恢复连续信号的全部信息。

参考文献[2]中, 针对抽样定理对正弦信号的适用性进行了讨论, 指出了抽样定理的局限性, 针对非正弦信号没有涉及。那么, 交流信号在正弦和非正弦条件下, 其有效值和有功功率计算最少需要每周波采样多少点呢? 抽样定理在这方面适不适用? 各种文献说法不一, 本文得出自己的结论, 供大家参考。

1 电工学相关知识^[1]

对于含最高 k 次谐波的单相交流信号:

$$f(t) = \sum_{i=1}^k A_i \sin(i\omega t + \varphi_i) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + \dots + A_k \sin(k\omega t + \varphi_k) \quad (1)$$

无论 $f(t)$ 是电流还是电压信号, 其有效值均可定义为:

$$F = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt} \quad (2)$$

$$F = \sqrt{\sum_{i=1}^k F_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^k \frac{A_i^2}{2}} \quad (3)$$

若单相线路的电压和电流信号表达式为:

$$u(t) = \sum_{p=1}^{k1} \sqrt{2} U_p \sin(\omega t + \varphi_p) \quad (4)$$

$$i(t) = \sum_{q=1}^{k2} \sqrt{2} I_q \sin(\omega t + \psi_q) \quad (5)$$

电压信号最高谐波为 $k1$, 电流信号最高谐波为 $k2$, $k1$ 和 $k2$ 的最小值为 k , 则:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)i(t) dt \quad (6)$$

$$P = \sum_{i=1}^k P_i = \sum_{i=1}^k U_i I_i (\cos(\varphi_i - \psi_i)) \quad (7)$$

2 交流电压、电流有效值离散计算

包含 k 次谐波的周期性非正弦电压、电流信号表示见(1)式, 对其均匀采样, 设每周期采样点数为 n , 采样间隔为 $\Delta t = \frac{T}{n}$, $\alpha = \omega \frac{T}{n}$, 则有

第 i 点采样值为:

$$f(i) = \sum_{p=1}^k A_p \sin(pi\alpha + \varphi_p), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

$$\text{有效值离散计算公式为: } F = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(i)^2} \quad (9)$$

其中 $n > 2k$, 采样起始点任意。

下面证明(9)式:

$$\begin{aligned} f(i)^2 &= \left(\sum_{p=1}^k A_p \sin(pi\alpha + \varphi_p) \right)^2 \\ &= \sum_{p=1}^k A_p^2 \sin^2(pi\alpha + \varphi_p) + \sum_{\substack{p=1 \\ q=1 \\ p \neq q}}^k A_p \sin(pi\alpha + \varphi_p) A_q \sin(qi\alpha + \varphi_q) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{p=1}^k \frac{A_p^2}{2} (1 - \cos(2p\alpha + 2\varphi_p)) \\
 &+ \sum_{\substack{p=1 \\ q=1 \\ p \neq q}}^k \frac{1}{2} A_p A_q \cos((p-q)\alpha + \varphi_p - \varphi_q) \\
 &- \sum_{\substack{p=1 \\ q=1 \\ p \neq q}}^k \frac{1}{2} A_p A_q \cos((p+q)\alpha + \varphi_p + \varphi_q) \\
 &= \sum_{p=1}^k \frac{A_p^2}{2} - \sum_{p=1}^k \left(\frac{A_p^2}{2} (\cos 2\varphi_p \cos 2ip\alpha - \sin 2\varphi_p \sin 2ip\alpha) \right. \\
 &+ \sum_{\substack{p=1 \\ q=1 \\ p \neq q}}^k A_p A_q (\cos((p-q)\alpha) \cos(\varphi_p - \varphi_q) - \sin((p-q)\alpha) \\
 &\sin(\varphi_p - \varphi_q)) \\
 &- \sum_{\substack{p=1 \\ q=1 \\ p \neq q}}^k A_p A_q (\cos((p+q)\alpha) \cos(\varphi_p + \varphi_q) - \sin((p+q)\alpha) \\
 &\sin(\varphi_p + \varphi_q)) \\
 \text{而 } \sum_{i=1}^n f(i)^2 &= \sum_{p=1}^k \sum_{i=1}^n \frac{A_p^2}{2} + \sum_{p=1}^k \left(\frac{A_p^2}{2} (\cos 2\varphi_p \sum_{i=1}^n \cos 2ip\alpha - \sin 2\varphi_p \right. \\
 &\sum_{i=1}^n \sin 2ip\alpha) \\
 &+ \sum_{\substack{p=1 \\ q=1 \\ p \neq q}}^k \frac{1}{2} A_p A_q (\cos(\varphi_p - \varphi_q) \sum_{i=1}^n \cos(p-q)\alpha - \sin(\varphi_p - \varphi_q) \\
 &\sum_{i=1}^n \sin(p-q)\alpha) \\
 &- \sum_{\substack{p=1 \\ q=1 \\ p \neq q}}^k \frac{1}{2} A_p A_q (\cos(\varphi_p + \varphi_q) \sum_{i=1}^n \cos(p+q)\alpha - \sin(\varphi_p + \varphi_q) \\
 &\sum_{i=1}^n \sin(p+q)\alpha)
 \end{aligned}$$

下面证明: $\sum_{i=1}^n \cos mi\varphi = 0$, $\sum_{i=1}^n \sin mi\varphi = 0$

从(11)式中可以看出, m 的取值最大为 $2k$ 。

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \cos mia &= \cos ma + \cos 2mam + \cdots + \cos nma \\
 &= \frac{\sin \frac{m}{2} a (\cos ma + \cos 2ma + \cdots + \cos nma)}{\sin \frac{m}{2} a} \\
 &= \frac{\sin \frac{3}{2} ma - \sin \frac{1}{2} ma + \sin \frac{5}{2} ma - \sin \frac{3}{2} ma + \cdots + \sin \frac{(2n+1)}{2} ma - \sin \frac{(2n-1)}{2} ma}{2\sin \frac{m}{2} a} \\
 &= \frac{\sin \frac{(2n+1)}{2} ma - \sin \frac{1}{2} ma}{2\sin \frac{1}{2} ma} = 0
 \end{aligned} \quad (12)$$

上式成立条件: $\sin \frac{1}{2} ma! = 0 \Leftrightarrow \sin \frac{mwT}{2n}! = 0$

$0 \Leftrightarrow n > m$

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \sin mia &= \sin ma + \sin 2mam + \cdots + \sin nma \\
 &= \frac{\sin \frac{m}{2} a (\sin ma + \sin 2ma + \cdots + \sin nma)}{\sin \frac{m}{2} a} \\
 &= \frac{\cos \frac{1}{2} ma - \cos \frac{3}{2} ma + \cos \frac{5}{2} ma - \cos \frac{7}{2} ma + \cdots + \cos \frac{(2n-1)}{2} ma - \cos \frac{(2n+1)}{2} ma}{2\sin \frac{m}{2} a} \\
 &= \frac{\cos \frac{1}{2} ma - \cos \frac{(2n+1)}{2} ma}{2\sin \frac{1}{2} ma} = 0
 \end{aligned} \quad (13)$$

上式成立条件: $\sin \frac{1}{2} ma! = 0 \Leftrightarrow \sin \frac{mwT}{2n}! = 0 \Leftrightarrow n > m$

把式(11)、(12)代入, 式(10)在 $n > 2k$ 条件下等于:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n a(i)^2 &= \sum_{p=1}^k \sum_{i=1}^n \frac{A_p^2}{2} \\
 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a(i)^2 &= \sum_{p=1}^k \frac{A_p^2}{2} = \sum_{p=1}^k F_p^2
 \end{aligned} \quad (14)$$

根据(3)式和(14)式, 可得(9)式, 公式得证。

在心式的推导中, 先估计交流电压或电流的最大谐波次数 k , 确定每周波采样点数 $n > 2k$, 计算采样间隔 $\Delta t = \frac{T}{n}$, 这样在交流电压、电流的有效值计算中可以保证对 k 次谐波不失真。如希望 21 次谐波不失真, 则在一个基波周期内, 至少应采样 $n = 2k + 1 = 43$ 点。当然, 可以提高采样点数, 降低 AD 量化误差对有效值计算的影响, 限于篇幅, 本文不予讨论。

下面举一个算例:

电压信号 $u(t) = \sqrt{2} \sin(\omega t + 10^\circ) + \sqrt{2} \sin(2\omega t + 30^\circ)$

的有效值为 $\sqrt{2}$, 最少采样点数为 5。表 1 为应用 Matlab 仿真计算结果。

3 有功功率计算

单相线路的电压和电流信号表达式见式(4)和式(5), 电压信号最高谐波为 k_1 , 电流信号最高谐波为 k_2 , k_1 和 k_2 的最小值为 k 。

对其均匀采样, 设每周期采样点数为 n , 采样间隔为 $\Delta t = \frac{T}{n}$, $\alpha = \omega \frac{T}{n}$, 则有

$$u(i) = \sum_{p=1}^{k_1} \sqrt{2} U_p \sin(p\alpha + \varphi_p) \quad i=1, 2, \cdots, n \quad (15)$$

$$i(i) = \sum_{q=1}^{k_2} \sqrt{2} I_q \sin(p\alpha + \varphi_q) \quad i=1, 2, \cdots, n \quad (16)$$

表 1 交流电压有效值 Matlab 仿真计算结果

采样点数	离散采样数值	有效值	结论
4	0.952 7 0.685 6 0.461 5 -2.099 8	1.224 7	采样点大于 5,
5	0.952 7 1.548 3 -0.326 3 0.3660 -2.540 6	1.414 2	有效值计算
6	0.952 7 2.036 0 -0.330 9 0.461 5 -0.621 8 -2.497 6	1.414 2	正确。

有功功率计算公式为： $P = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u(i)i(i)$ $n > k_1 + k_2$, 采样起始点任意。

下面证明(17)式：

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n u(i)i(i) &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{p=1}^{k_1} \sqrt{2} U_p \sin(p\alpha + \varphi_p) \right) \left(\sum_{q=1}^{k_2} \sqrt{2} I_q \sin(q\alpha + \psi_q) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{p=1}^{k_1} \sum_{q=1}^{k_2} 2 U_p I_q \sin(p\alpha + \varphi_p) \sin(q\alpha + \psi_q) \right) + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{p=1}^{k_1} \sum_{q=1}^{k_2} 2 U_p I_q \sin(p\alpha + \varphi_p) \sin(q\alpha + \psi_q) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{p=1}^{k_1} U_p I_p (\cos(\varphi_p - \psi_p) - \cos(2p\alpha + \varphi_p + \psi_p)) \right) \\ &+ \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^{k_1} \sum_{q=1}^{k_2} U_p I_q \cos((p-q)\alpha + \varphi_p - \psi_q) - \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^{k_1} \sum_{q=1}^{k_2} U_p I_q \cos((p+q)\alpha + \varphi_p + \psi_q) \\ &= \sum_{p=1}^k \sum_{i=1}^n U_p I_p (\cos(\varphi_p - \psi_p) - \cos(2p\alpha + \varphi_p + \psi_p)) + \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^k \sum_{q=1}^k \cos 2ip\alpha - \sin(\varphi_p + \psi_p) \sum_{i=1}^n \sin 2ip\alpha \\ &+ \sum_{p=1}^{k_1} \sum_{q=1}^{k_2} A_p A_q (\cos(\varphi_p - \psi_q) \sum_{i=1}^n \cos((p-q)\alpha) - \sin(\varphi_p - \psi_q) \sum_{i=1}^n \sin((p-q)\alpha)) \\ &- \sum_{p=1}^{k_1} \sum_{q=1}^{k_2} A_p A_q (\cos(\varphi_p + \psi_q) \sum_{i=1}^n \cos((p+q)\alpha) - \sin(\varphi_p + \psi_q) \sum_{i=1}^n \sin((p+q)\alpha)) \end{aligned} \quad (18)$$

由式(12)、(13)可知： $\sum_{i=1}^n \cos m i \varphi = 0$, $\sum_{i=1}^n \sin m i \varphi = 0$, 式

(18)中 m 最大取值为 $k_1 + k_2$ 。

因此：在 $n > k_1 + k_2$ 条件下

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n u(i)i(i) &= \sum_{p=1}^k \sum_{i=1}^n U_p I_p \cos(\varphi_p - \psi_p) = \sum_{p=1}^k n U_p I_p \cos(\varphi_p - \psi_p) \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u(i)i(i) &= \sum_{p=1}^k U_p I_p \cos(\varphi_p - \psi_p) \end{aligned} \quad (19)$$

根据(7)式和(19)式, 可得(17)式, 公式得证。

在上式的推导中, 先估计交流电压的最大谐波次数 k_1 和交流电流的最大谐波次数 k_2 , 确定每周波采样点数 $n > k_1 + k_2$, 计算采样间隔 $\Delta t = \frac{T}{n}$, 这样在有功功率计算中可以保证对电压电流谐波不失真。如希望在计算有功功率中电压和电流信号 21 次谐波不失真, 则一个基波周期内, 至少应采样 $n = k_1 + k_2 + 1 = 43$ 点。当然, 可以提高采样点数, 降低 AD 量化误差对有功功率计算的影响, 限于篇幅, 本文不予讨论。

表 2 有功功率计算 Matlab 仿真结果

采样点数	离散采样数值	有功功率	结论
3	U: 0.245 6 1.083 4 -1.328 9 I: -0.376 2 -0.085 3 0.461 5	-0.266 0	采样点大于 4, 有功功率计算正确。
4	U: 0.245 6 1.392 7 -0.245 6 -1.392 7 I: -0.376 2 0.201 9 1.790 5 -1.616 1	0.500 0	
5	U: 0.245 6 1.400 5 0.620 0 -1.017 3 -1.248 7 I: -0.376 2 0.677 6 0.464 5 1.725 4 -2.491 3	0.500 0	

下面举一个算例：

电压信号 $u(t) = \sqrt{2} \sin(\omega t + 10^\circ)$, 电流信号 $i(t) = \sqrt{2} \sin(\omega t - 50^\circ) + \sqrt{2} \sin(2\omega t + 30^\circ)$, 有功功率为 0.5, 最少采样点数为 4。表 2 为应用 Matlab 仿真计算结果。

4 关于视在功率、无功功率、功率因数计算的建议

对于非正弦交流系统, 视在功率的定义也有很多种^[3], 被普遍接受的定义为：

$$S = UI \quad (20)$$

Budeanu 无功功率定义由于存在谐波无功可能正负抵消的情况^[4], 无功功率计算推荐采用功率三角法

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} \quad (21)$$

这样能充分利用计算出的电压、电流有效值和有功功率, 精度高、计算简单。在实际的使用中还需要判定无功的方向, 建议采用比较基波电压和基波电流过零点的方法确定, 这种方法与我国现行无功标准^[5]不冲突, 有很强的实用价值。

功率因数的计算建议：

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} \quad (22)$$

采用式(21)和(22), 计算出来的无功偏大, 功率因数偏低, 对于供电公司相对有利, 对于电力用户有不利的一面。本文不再深入讨论。

本文给出了交流信号有效值和有功功率的离散计算公式, 并给出了严格的数学证明, 这对于正弦、非正弦、平衡、非平衡电力系统都适用。对于视在功率、无功功率、功率因数的计算, 本文提出了自己的建议, 计算简单, 精度高。这些计算公式对于正弦、平衡电力系统是适用的, 对于非正弦、不平衡电力系统, 具有一定的使用价值。

参考文献

- [1] 张有顺, 冯井岗. 电能计量基础[M]. 北京: 中国计量出版社, 2002.
- [2] 胡广书. 数字信号处理-理论、算法与实现[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003.
- [3] IEEE 1459-2000 Definitions for the Measurement of Electric Power Quantities Under Sinusoidal, Nonsinusoidal, Balanced, or Unbalanced Conditions.
- [4] 王兆安, 杨君, 刘进军. 谐波抑制和无功功率补偿[M]. 北京: 机械工业出版社, 1998.
- [5] GB/T17882-1999 2 级和 3 机静止式交流无功电度表.

(收稿日期: 2007-04-30)