

# 基于矩阵对角加载与泄漏迭代的广义最小平均 $p$ 范数波束形成方法\*

查代奉, 廖英杰, 卢国庆

(九江大学 电子工程学院, 江西 九江 332005)

**摘要:** 在简要介绍稳定分布统计特性的基础上, 依据泄漏梯度下降原理、矩阵对角加载方法, 通过对最小平均  $p$  范数加以改进, 提出了一种稳定分布噪声下基于矩阵对角加载与泄漏迭代的广义最小平均  $p$  范数波束形成方法, 并探讨了算法性能。

**关键词:** 稳定分布 分数低阶矩 波束形成 矩阵对角加载 泄漏迭代 最小平均范数

## Generalized least mean $p$ -norm beamforming method based on matrix diagonal loading and leakage iteration

ZHA Dai Feng, LIAO Ying Jie, LU Guo Qing

(College of Electronic Engineering, Jiujiang University, Jiujiang 332005, China)

**Abstract:** After introducing the statistical characteristics of stable distribution briefly, this paper proposes a new generalized least mean  $p$ -norm beamforming method based on the matrix diagonal loading and the leakage iteration under alpha-stable noise conditions.

**Key words:** stable distribution; fractional lower order moment, beamforming; matrix diagonal loading; leakage iteration; least mean  $p$ -norm

波束形成是阵列信号处理的一个重要内容, 其实质就是通过对阵列接收数据进行加权处理和空域滤波, 以达到增强有用信号、抑制干扰的目的。在阵列信号处理中, 人们常常将所研究的噪声或干扰采用高斯分布模型来描述, 并采用基于二阶统计量的方法进行分析和处理, 这在许多情况下是可行的。然而, 在诸如水声、雷达、通信和生物医学信号处理等领域的实际应用中, 所遇到的许多随机信号和噪声并不是高斯分布的, 如海洋环境噪声、电路传输线上瞬间尖峰、大气噪声、语音信号和生物医学信号以及多种人为噪声等, 这些信号中存在显著的尖峰状噪声, 使得原来一些算法不能达到满意的结果, 并使算法产生退化。有一类很重要的统计信号模型称为  $\alpha$  稳定分布<sup>[1-2]</sup>( $\alpha$ -stable distribution), 可以用来描述上面提到的这类重拖尾非高斯脉冲信号和噪声。定义满足  $0 < \alpha < 2$  的  $\alpha$  稳定分布为低阶  $\alpha$  稳定分布以区别于  $\alpha=2$  的高斯分布, 其主要区别是低阶稳定分布概率密度比高斯分布概率密度有更厚的拖尾, 即远离均值或中值的样本数较多, 从而造成了其时间域波形上较多的

尖峰脉冲。与其他统计模型不同, 稳定分布没有统一闭式的概率密度函数, 其二阶及二阶以上统计量均不存在。通常用特征函数对其进行描述<sup>[1-2]</sup>:

$$\varphi(t) = \exp[j\zeta t - \delta|t|^\alpha [1 + j\beta \text{sgn}(t)\omega(t, \alpha)]] \quad (1)$$

其中

$$\omega(t, \alpha) = \begin{cases} \tan \frac{\alpha\pi}{2} & \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi} \log|t| & \alpha = 1 \end{cases}, \quad -\infty < \zeta < \infty, \delta > 0, 0 < \alpha \leq 2, -1 \leq \beta \leq 1$$

$\alpha$  稳定分布完全由其  $\alpha, \beta, \delta, \zeta$  四个参数来决定:  $\alpha$  为特征指数, 用来度量分布函数拖尾的厚度;  $\delta$  为分散系数, 与高斯分布的方差类似, 在高斯情况下等于方差的一半;  $\beta$  是对称参数,  $\beta=0$  时, 稳定分布是关于  $\zeta$  对称的, 此时的分布为对称  $\alpha$  稳定分布 (SaS);  $\zeta$  为位置参数。在处理这类噪声时, 原来基于最小均方误差准则的滤波算法不再是最优算法。自从  $\alpha$  稳定分布引入信号处理领域以来, 出现了许多自适应滤波算法, 其中大部分是基于最小离差准则的, 即使误差的  $L_p$  范数最小, Shao 与 Nikias 最早提出了最小平均  $p$  范数自适应滤波算法<sup>[2]</sup>, 可以看成 LMS 算法的推广, 最小平均  $p$  范数估计方法已经广泛用于  $\alpha$  稳定分布信号处理中。

\* 国家自然科学基金项目 (60372088); 江西省教育厅科技项目 (赣教技字 [2007]329)

1 算法描述

在自适应波束形成中,有三种常用的统计准则:最小均方误差准则(MMSE)、最大信噪比准则(MSNR)、线性约束最小方差准则(LCMV),其中 LCMV 准则可适用于广义线性多约束情况,属较优的一种准则。在最优波束形成的方法中,线性约束最小方差无失真响应(MV-DR)自适应波束形成算法尤为令人关注,其基本思想是对权矢量加以线性约束,使得从期望方向来的信号能以单位增益通过,输出信号的能量  $E\{|y(n)|^2\}$  达到最小化。由于低阶  $\alpha$  稳定分布过程中没有二阶和高阶矩,基于二阶和高阶矩等传统的波束形成技术不适用于服从稳定分布的脉冲噪声环境。当  $0 < p < \alpha \leq 2$  时,  $S\alpha S$  随机变量的范数正比于其  $p$  阶矩<sup>[1-2][9-13]</sup>。据此, Tsakalides 与 Nikias 利用分数低阶矩(FLOM)的方法提出了最小平均  $p$  范数(LMP)波束形成算法<sup>[4][9]</sup>,其性能与收敛速度较传统的波束形成算法(如 LMS 算法)均有很大提高。本文在此基础上,提出一种具有更好韧性的基于矩阵对角加载与泄漏迭代的广义最小平均  $p$  范数波束形成方法。

假设远场有  $L$  个单径传输的窄带信号(其中一个期望有用信号、 $L-1$  个干扰信号),  $M$  个各向同性阵列接收传感器成线性均匀排列,信号入射方向与阵列法线分别成角度  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_L$ , 则阵列接收信号矢量  $X(n)=[x_1(n), x_2(n), \dots, x_M(n)]^T, n=1, 2, \dots, N$ , 可表示为:

$$X(n) = \sum_{i=1}^L v(\theta_i) s_i(n) + V(n) \quad (2)$$

式中  $v(\theta_i)$  为  $\theta_i$  方位处信号的传输导向矢量,  $s_i(n)$  为对第  $i$  个信号的感应强度,  $V(n)$  为阵列噪声矢量。阵列瞬时输出为  $y(n) = W(n)^H X(n)$ , 其中上标 H 表示共轭转置,  $W(n)=[w_1(n), w_2(n), \dots, w_M(n)]^T$  为加权矢量。若采用 LCMV 准则,并依据分数低阶矩(FLOM)原理<sup>[1-2][12][13]</sup>,  $\alpha$  稳定分布在脉冲噪声环境下的自适应波束形成问题可以描述为在条件  $C^H W(n) = f$  ( $C$  是约束矩阵,其列向量为约束方向上的导向矢量,  $f$  是常矢量)的约束下,通过迭代方法求得最佳权矢量使得阵列输出  $y(n)$  的  $p$  阶矩 ( $0 < p < \alpha \leq 2$ ) 达到最小,即求解如下优化问题:

$$W_{opt} = \arg \min_{W(n)} E\{|y(n)|^p\} = \arg \min_{W(n)} E\{|y(n)|^{p-2} |y(n)|^2\} \quad (3)$$

(约束于  $C^H W(n) = f$ )

据此,由拉格朗日法可取如下目标函数:

$$J[W(n)] = \frac{1}{2} E\{|y(n)|^{p-2} W^H(n) X(n) X^H(n) W(n)\} + \lambda (C^H W(n) - f) \quad (4)$$

式中,  $\lambda$  为拉格朗日矢量因子, 乘上 1/2 是为推导简便起见。依据最速梯度下降方法原理,在以时刻  $n$  的输出  $y(n)$ 、权矢量  $W(n)$ 、观测矢量  $X(n)$  求取  $n+1$  时刻的权矢量  $W(n+1)$  时,常在迭代中用目标函数梯度的瞬时估计值代替瞬时真实值。对本文的目标函数  $J[W(n)]$  而言,其梯度  $\nabla J[W(n)]$  的求取也采取了这种方法,因此,以瞬时

值  $|y(n)|^{p-2} X(n) X^H(n) W(n)$  代替数学期望值  $E\{|y(n)|^{p-2} X X^H(n) W(n)\}$ , 这样可求得目标函数  $J[W(n)]$  梯度的瞬时估计值:

$$\hat{\nabla} J[W(n)] = |y(n)|^{p-2} X(n) X^H(n) W(n) + C \lambda^H \quad (5)$$

对于常规 LMS 自适应滤波迭代算法  $W(n+1) = W(n) - \mu \hat{\nabla} J[W(n)]$  而言,当迭代步长  $\mu$  由于某种因素变为零时,权矢量将不再变化而保持  $\mu$  变为零时的值;对于泄露 LMS<sup>[6]</sup> 自适应滤波算法  $W(n+1) = \gamma W(n) - \mu \hat{\nabla} J[W(n)]$ , 当  $\mu$  为 1 时,权矢量将逐渐变化,最后将变为零矢量,这一过程称为泄露<sup>[6]</sup>。类似地,为增加算法的收敛速度并降低波束旁瓣(本文后面的仿真验证了这一性能),在本文算法中引入了泄露因子  $\gamma$ , 由迭代公式  $W(n+1) = \gamma W(n) - \mu \hat{\nabla} J[W(n)]$  得:

$$W(n+1) = \gamma W(n) - \mu |y(n)|^{p-2} X(n) X^H(n) W(n) - \mu C \lambda^H \quad (6)$$

式中,  $0 < \gamma \leq 1$ , 由约束条件有:

$$f = C^H W(n+1) = \gamma C^H W(n) - \mu |y(n)|^{p-2} C^H X(n) X^H(n) W(n) - \mu C^H C \lambda^H \quad (7)$$

可求得  $\lambda^H$ , 将其代入式(6), 并令

$$P = I - C(C^H C)^{-1} C^H \quad (8)$$

$$F = C(C^H C)^{-1} f \quad (9)$$

则可得迭代式:

$$W(n+1) = P[\gamma I - \mu |y(n)|^{p-2} X(n) X^H(n)] W(n) + F \quad (10)$$

为增强波束形成能力、降低旁瓣,对式(10)中的瞬时自相关矩阵  $X(n) X^H(n)$  进行对角元素加载修正,将其修正为  $X(n) X^H(n) + a \sigma_w^2 I$  ( $a$  为加载因子,  $\sigma_w^2$  为阵元平均热噪声功率),于是得到本文所提基于矩阵对角加载与泄漏迭代的广义最小平均  $p$  范数(GLMP)波束形成权值迭代算法:

$$W(n+1) = P[\gamma I - \mu |y(n)|^{p-2} (X(n) X^H(n) + a \sigma_w^2 I)] W(n) + F \quad (11)$$

新算法将泄露梯度下降算法、LMP 算法和矩阵对角加载方法<sup>[5][7]</sup>结合起来,得出一种在高斯和分数低阶  $\alpha$  稳定分布噪声条件下具有良好韧性且适用范围更宽的自适应波束形成方法,在不同参数取值时, LMS 算法、LMP 算法是 GLMP 算法的一种特例。当取  $\gamma=1, p=2, a=0$  时,式(11)即是基于约束  $C^H W(n) = f$  的 LMS 波束形成算法权值迭代公式<sup>[3]</sup>:

$$W(n+1) = P[W(n) - \mu y^*(n) X(n)] + F \quad (12)$$

式中  $y^*(\cdot)$  表示取共轭,若取  $\gamma=1, p < 2, a=0$  时,式(11)即是基于约束  $C^H W(n) = f$  的 LMP 波束形成算法权值迭代公式<sup>[4][9]</sup>:

$$W(n+1) = P[W(n) - \mu |y(n)|^{p-2} y^*(n) X(n)] + F \quad (13)$$

2 性能分析

为进一步探讨算法性能,定义  $\alpha$  稳定分布脉冲环境

下的基于分数低阶统计量(FLOS)的自适应波束形成器的信号干扰噪声比 SINR 为:

$$SINR = \frac{E\{|W_{opt}^H X_s(n)|^p\}}{E\{|W_{opt}^H X_{i+v}(n)|^p\}} \quad (0 < p < \alpha \leq 2) \quad (14)$$

式中  $X_s(n)$  为期望信号  $s_d(n)$  在传感器的接收分量,  $X_{i+v}(n)$  为干扰与噪声信号分量, 分别表示为:

$$X_s(n) = v(\theta_d) s_d(n) \quad (15)$$

$$X_{i+v}(n) = \sum_{i=2}^L v(\theta_i) s_i(n) \quad (16)$$

在波束形成中, 干扰信号与传感器热噪声对波束旁瓣有较大的影响, 而传感器热噪声的影响往往不可忽略, 若对每个时刻的  $X(n)X^H(n)$  进行特征分解得到  $M$  个相应的瞬时特征值与特征矢量  $\hat{\lambda}_m, \hat{v}_m, m=1, 2, \dots, M$ , 且有  $\hat{\lambda}_1 \geq \hat{\lambda}_2 \geq \dots \geq \hat{\lambda}_L \geq \hat{\lambda}_{L+1} \geq \dots \geq \hat{\lambda}_M$ . 为便于讨论, 定义每个迭代时刻的瞬时波束响应为:

$$Q(n, \theta) = W^H(n) v(\theta) \quad (-90^\circ \leq \theta \leq +90^\circ) \quad (17)$$

根据文献[5][7]可将其分解为瞬时静态响应  $Q_q(n, \theta)$  (即空间匹配滤波器的瞬时响应, 是没有干扰与噪声信号时对某期望方向的波束响应) 减去每个干扰与噪声对应的瞬时特征值对应的瞬时特征响应的加权和[5]:

$$Q(n, \theta) = Q_q(n, \theta) - \sum_{m=2}^L k_m R_m(n, \theta) - \sum_{m=L+1}^M k_m H_m(n, \theta) \quad (18)$$

式中  $k_m$  为加权系数,  $R_m(n, \theta)$  为干扰的瞬时特征响应,  $H_m(n, \theta)$  为热噪声的瞬时特征响应, 且

$$k_m = \frac{\hat{\lambda}_m - \sigma_w^2}{\hat{\lambda}_m} = 1 - \frac{\sigma_w^2}{\hat{\lambda}_m}, \quad R_m(n, \theta) = \begin{cases} R_m(n, \theta_m) & \theta = \theta_m \\ 0 & \theta \neq \theta_m \end{cases} \quad (19)$$

先讨论传感器热噪声的影响。原则上, 要求热噪声对波束响应的影响越小越好。理想情况下有  $\lambda_m = \lambda_{min} = \sigma_w^2, L+1 \leq m \leq M$ , 此时  $M-L$  个噪声特征矢量对波束响应没有影响。实际中,  $\hat{\lambda}_m$  为瞬时随机值, 它围绕传感器热噪声功率  $\sigma_w^2$  随迭代时刻  $n$  随机波动, 热噪声的瞬时特征响应  $H_m(n, \theta)$  因  $\hat{\lambda}_m$  与噪声功率  $\sigma_w^2$  有偏离从而影响该迭代时刻的波束响应。为降低其影响, 将  $X(n)X^H(n)$  修正为  $X(n)X^H(n) + a\sigma_w^2 I$ , 则其特征值修正为  $\hat{\lambda}_m + a\sigma_w^2$ , 此时有:

$$k_m = 1 - \frac{\sigma_w^2 + a\sigma_w^2}{\hat{\lambda}_m + a\sigma_w^2} \quad (20)$$

理论上, 对式(20), 如果  $a$  取值很大,  $k_m$  则近似为 0, 这样热噪声在该时刻的特征响应  $H_m(n, \theta)$  对该时刻整个波束响应  $Q(n, \theta)$  没有影响。

其次, 考虑到  $L-1$  个干扰信号的瞬时特征响应对整个波束响应也有影响, 其瞬时特征响应的加权和  $\sum_{m=2}^L k_m R_m(n, \theta_m)$  相当于在各个干扰方向  $\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_L$  上的瞬间置零[5]

(形成瞬间零陷), 原则上要求零陷越深越好, 从而  $k_m$  越大越好, 对于干扰信号而言, 若其瞬时特征值有:

$$\hat{\lambda}_m \gg \sigma_w^2 \quad (2 \leq m \leq L) \quad (21)$$

将  $X(n)X^H(n)$  修正为  $X(n)X^H(n) + a\sigma_w^2 I$  后, 有  $k_m = 1 - \frac{\sigma_w^2 + a\sigma_w^2}{\hat{\lambda}_m + a\sigma_w^2}$ , 理论上, 当  $a$  取值很小时, 瞬间零陷能力会增强。

### 3 仿真实验结果

为验证本文所提算法性能并与 LMP 算法进行比较, 本文做了一些仿真实验。考虑远场  $-20^\circ$  处有一 QPSK 单径传输期望信号(载频 1500MHz),  $40^\circ$  处有一包络为复  $\alpha$  稳定分布干扰噪声( $\alpha=1.5$ ) (产生复全向  $\alpha$  稳定分布信号算法见文献 [8]), 采用的线型传感器阵列有 10 个传感器 ( $M=10$ ), 阵元间隔为期望信号波长的 1/2, 传感器热噪声假定为单位功率 ( $\sigma_w^2=1$ ), 取约束矩阵为期望信号导向矢量  $C=v(-20^\circ)$ , 响应矢量  $f=1$ , 权矢量初值取干扰信号导向向量的 5 倍, 迭代步长  $\mu=0.01$ , 阵列接收数据的快拍数取  $N=1000$ 。

实验 1: 期望信号功率分别为 15dB、5dB,  $\gamma$  选取  $0 < \gamma \leq 1$ , 分别进行 50 次蒙特卡洛实验, 得到阵列输出 SINR 与  $\gamma$  关系如图 1 所示。由此可知,  $\gamma$  取 0.85~0.95

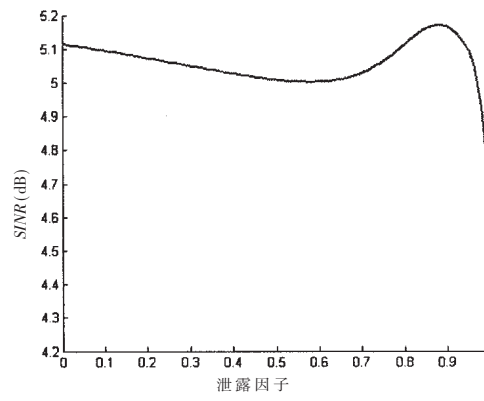
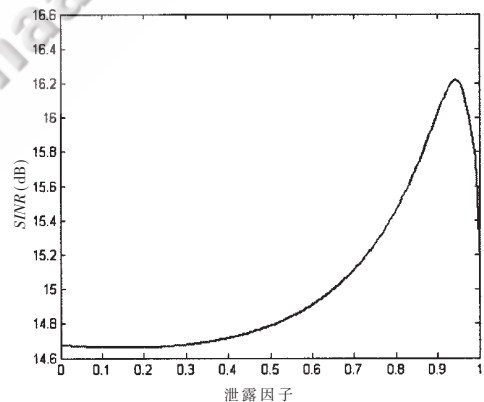


图 1 阵列 SINR 与  $\gamma$  的关系

时有较高的信号干扰噪声比。

实验 2: 期望信号功率分别为 15dB、5dB,  $a$  分别选取  $0 \leq a \leq 20$ ,  $0 \leq a \leq 50$ , 进行 50 次蒙特卡洛实验, 得到阵列输出 SINR 与  $a$  关系如图 2 所示。由此可知, 阵列输出 SINR 在  $5 < a < 10$  时有一峰值, 引入对角加载因子可提高 SINR。

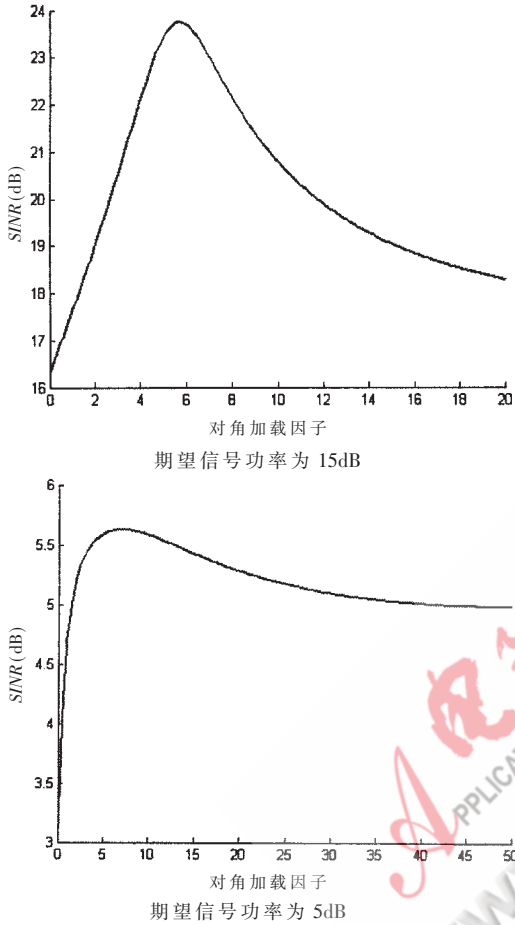


图 2 阵列 SINR 与  $a$  的关系

实验 3: 取  $a=0, \gamma=0.9$ , 得到图 3 的权矢量收敛过程

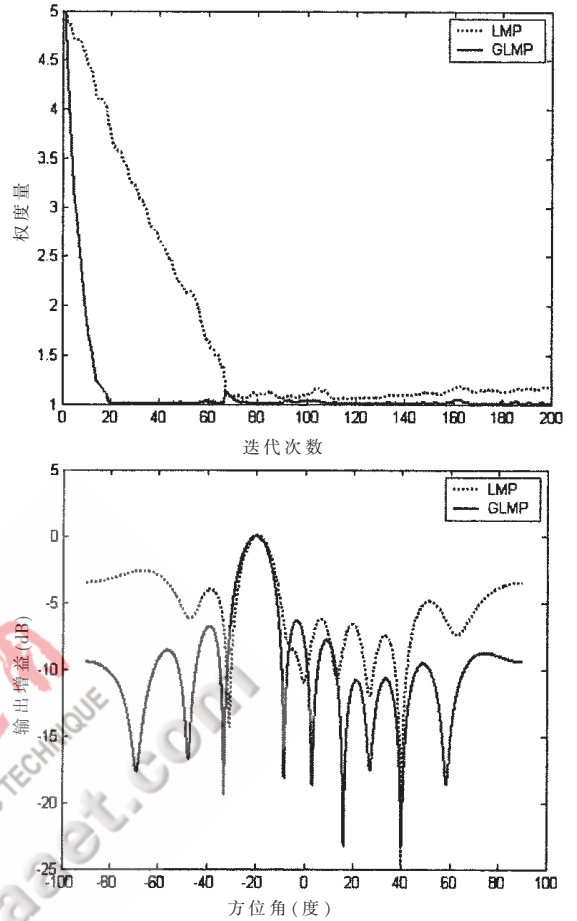


图 3 收敛过程与波束图 ( $a=0, \gamma=0.9$ )

与波束图。LMP 算法在 70 次迭代后收敛, GLMP 算法在 20 次迭代后收敛, 表明合适的泄露因子对收敛速度有明显改善, 而且 GLMP 算法旁瓣抑制水平较 LMP 算法有所提高。

实验 4: 取  $a=7, \gamma=1$ , 得到图 4 的权矢量收敛过程与波束图。LMP 算法在 70 次迭代后收敛, GLMP 算法也在 70 次迭代后收敛, GLMP 算法旁瓣抑制水平较 LMP

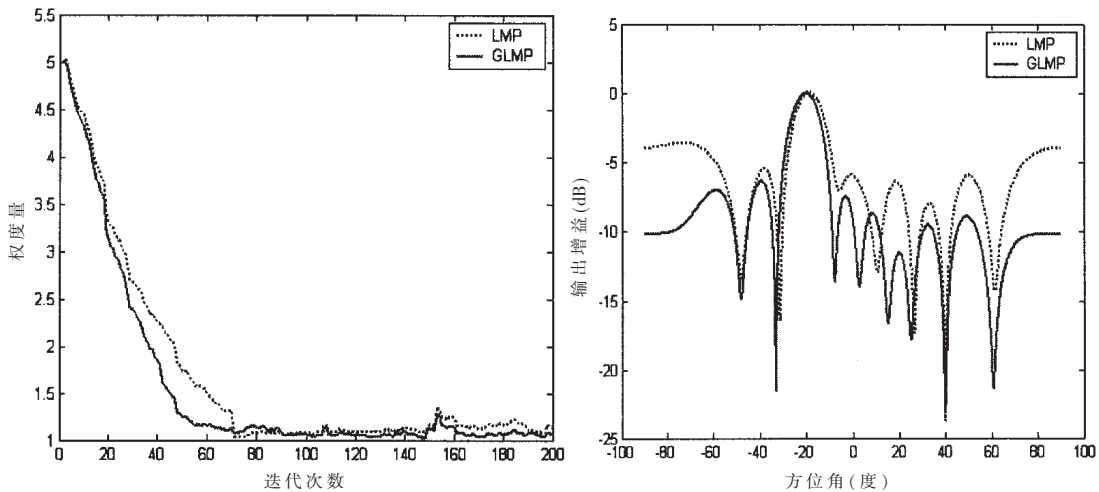


图 4 收敛过程与波束图 ( $a=7, \gamma=1$ )

算法有所提高。表明对角加载因子  $a$  的选取,能更好地抑制波束旁瓣。

根据以上仿真结果, $\gamma$  取 0.85~0.95 时有较高的信号干扰噪声比,合适的泄露因子对收敛速度有明显改善,阵列输出  $SINR$  在  $5 < a < 10$  时有一峰值,引入对角加载因子可提高  $SINR$ ,且能更好地抑制波束旁瓣。

综合上述讨论,在每一个迭代时刻,要求参数  $a$  应满足在某一区间的条件。由于讨论的是瞬时情况,考虑到算法最终收敛后,要求整个阵列输出的  $SINR$  要尽可能大,通过计算机仿真得知,阵列输出  $SINR$  在  $5 < a < 10$  范围时有一峰值(见图 2),根据仿真结果,因此可选取  $5 < a < 10$  作为参数的经验取值范围,但具体取值有赖于对期望信号功率的先验了解程度。

稳定分布可以更好地描述实际应用中所遇到的具有较大脉冲特性的随机信号和噪声。本文依据泄漏梯度下降原理、矩阵对角加载方法,提出了基于矩阵对角加载与泄漏迭代的广义最小平均  $p$  范数波束形成方法,分析和仿真实验表明,与 LMP 算法相比,GLMP 算法有显著改进,通过选取不同的泄露因子与矩阵对角加载因子,对于算法收敛速度有较大提高,且波束旁瓣削弱能力亦有一定增强,是一种在高斯和分数低阶  $\alpha$  稳定分布噪声条件下具有良好韧性且适用范围更宽的自适应波束形成方法。

### 参考文献

- [1] NIKIAS C L, SHAO M. Signal processing with alpha-stable distributions and applications. New York: John Wiley & Sons Inc., 1995.
- [2] SHAO M, NIKIAS C L. Signal processing with fractional lower order moments: stable processes and their applications, Proceedings of IEEE, 1993,81(7):986-1010.
- [3] TSAKALIDES P, NIKIAS C L. Robust space-time adaptive processing (STAP) in non-gaussian clutter environments, IEE Proc. Radar, Sonar, Navig.,1999,146(2):84-93.
- [4] TSAKALIDES P, NIKIAS C L. Robust adaptive beamforming in alpha-stable noise environments, IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1996:2884-2887.
- [5] DIMITRIS G M, VINAY K I, STEPHEN M K. Statistical and adaptive signal processing(中译版). 北京:电子工业出版社,2003.
- [6] HAYKIN S. Adaptive filter theory(Forth edition)(影印版), 北京:电子工业出版社,2002.
- [7] CARLSON B D. Covariance matrix estimation errors and diagonal loading in adaptive arrays. IEEE Trans. on Aerospace and Electronic System,1988,24(4):397-401.
- [8] SAMORODNITSKY G, TAQQU M S. Stable non-gaussian random process: Stochastic models with infinite variance. New York: Chapman and Hall, 1994.
- [9] KANNAN B, FITZGERALD W J. Beamforming in additive alpha-stable noise using fractional lower order statistics (FLOS). The 6th IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems, 1999,3:1755-1758.
- [10] KANNAN B, FITZGERALD W J. Beamforming in additive alpha-stable noise using fractional lower order statistics (FLOS). The 6th IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems, 1999,3:1755-1758.
- [11] TSAKALIDES P, NIKIAS C L. The robust covariation-based MUSIC(ROC-MUSIC) algorithm for bearing estimation in impulsive noise environments. IEEE Trans. on signal processing,1996,44(7).
- [12] TSIHRINTZIS G A, NIKIAS C L. Evaluation of FLOS-based detection algorithms on real sea-clutter data. IEE Proc. Radar, Sonar, Navig., 1997.
- [13] BODENSCHATZ J S, NIKIAS C L. Symmetric alpha-stable filter theory. IEEE Transactions on Signal Processing, 1997,45:2301-2306.
- [14] TSAKALIDES P, NIKIAS C L. Subspace-based direction finding in alpha-stable noise environments. International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1995,3:2092-2095.

(收稿日期:2007-03-24)