相关信道下 MIMO 系统误符号率的研究

贺中堂[1]，许苏晓[1]，张力军[2]
（1. 徐州空军学院，江苏 徐州 221000；
2. 南京邮电大学 通信与信息工程学院，江苏 南京 210003）

摘　要：研究在基于发射相关信道的 MIMO 系统中，采用线性 ZF 接收机时各子数据流信噪比的概率分布；利用随机矩阵理论，推导了信噪比概率密度函数公式；给出了采用 MPSK 调制时，各子数据流误符号率的闭式公式；在发射端采用均匀线阵条件下，分析了角度扩展对误符号率的影响。

关键词：MIMO　相关信道　误符号率　ZF 接收机

MIMO（多输入多输出）系统在发射端和接收端采用多天线技术，可以充分利用空间资源，在不增加发射功率和带宽的前提下提高系统容量，并能有效地改善系统性能，因而在第四代移动通信系统中有重要的应用价值。理论研究表明对准静态、平坦衰落信道，当接收天线数 r 大于等于发射天线数 t 时，MIMO 系统容量将随发射天线数的增加而线性增长[1]。为获得极限容量，提出了两类接收机结构：非线性接收机(如 BLAST 系列算法[2])和线性接收机(如采用 ZF 或 MMSE 算法的接收机)。由于 BLAST 系列算法结构复杂，目前低复杂度线性接收机的研究引起了业界的广泛关注[3,4]。

实际应用中，真实无线信道通常与角度扩展、散射物和天线距离等因素有关。各天线间的衰落存在一定的相关性，关于衰落相关性对 MIMO 系统的影响，目前研究主要集中在对信道容量的分析和优化上[5~7]，而对采用低复杂度线性接收机的 MIMO 系统的误符号率目前研究较少。文献[8]对存在发送相关的 MIMO 系统，利用 Wishart矩阵分析理论，得出了各个子数据流误符号率上界的一个近似表达式。文献[9]研究了采用 ZF 接收机的 MIMO 系统各子数据流 SNR 的概率分布，得出了 SNR 概率密度函数解析表达式。本文利用该结果，研究当存在发射相关时，采用 MPSK 调制时系统的误符号率，得出其闭式表达式，并分析不同角度扩展对 MIMO 系统误符号率的影响，最后给出仿真结果及结论。

1 信道模型

考虑一 $r\times t$ 的窄带 MIMO 系统，接收天线数为 r，发射天线数为 t。接收信号等效离散时间系统模型为

$$y=\boldsymbol{Hx}+\boldsymbol{w} \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}$ 为 $t\times 1$ 维复发射信号向量，其协方差矩阵 $\boldsymbol{R}_{xx}=E[\boldsymbol{xx}^{\mathrm{H}}]=\boldsymbol{I}_t$，$(\cdot)^{\mathrm{H}}$ 表示共轭转置，$\boldsymbol{I}_t$ 为 $t\times t$ 的单位矩阵；$\boldsymbol{H}$ 为 $r\times t$ 维信道矩阵；其元素 $h_{mn}\{m=1,2,\cdots r;\ n=1,2,\cdots t\}$ 表示发射天线 n 与接收天线 m 间的路径增益，为零均值、循环对称的复高斯随机变量；$\boldsymbol{w}$ 为 $r\times 1$ 维 AWGN 矢量，其均值为 0；方差矩阵为 $\mathrm{E}[\boldsymbol{ww}^{\mathrm{H}}]=N_0\boldsymbol{I}_r$，$N_0$ 为噪声功率，$N_0=\sigma_n^2$，$\boldsymbol{I}_r$ 为 $r\times r$ 维单位矩阵。

信道为准静态慢变 Rayleigh 衰落信道，并假设所有天线组成部分都有相同辐射形式，空间相关性独立于阵列中天线位置，因此所有组成部分有相同的散射。在此基础上，发射端与接收端天线统计特性可分离，由文献[9]，信道矩阵 $\boldsymbol{H}$ 和信道的协方差矩阵 $\boldsymbol{R}_c$ 可以写为：

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{R}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{H}_w\boldsymbol{T}^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{R}_c=\boldsymbol{R}\otimes\boldsymbol{T} \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{R}_c=\mathrm{E}\ (\boldsymbol{hh}^{\mathrm{H}})$ 为 $rt\times rt$ 维信道协方差矩阵，$\boldsymbol{h}=\mathrm{vec}(\boldsymbol{H})$，是将 $\boldsymbol{H}$ 的列向量堆积而形成的 $rt\times 1$ 维的列向量，$\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 分别为 $r\times r$ 和 $t\times t$ 接收端和发送端的空间协方差矩阵。$\boldsymbol{H}_w$ 各元素为独立同分布、均值为 0、方差为 1 的复随机变量。信道矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的分布可以表示为：

$$\boldsymbol{H}\sim N_{r,t}(0,\boldsymbol{R}\otimes\boldsymbol{T}) \tag{4}$$

实际应用中基站通常都架设得比较高，且基站天线之间的间距也不大，不同收发天线之间的衰落具有较强的相关性，通常在市区环境中。因此可以将传输信道描述为一个发射信道衰落强相关、接收信道衰落独立的模型，本文只考虑发射相关，因此令 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{I}_r$；假定发射端采用均匀线阵(ULA)，发射相关矩阵由文献[11]给出，发射端相关系数为：

$$[\boldsymbol{T}]_{m,n}=e^{-j2\pi(m-n)d_t\cos(\theta_t)}e^{-\frac{1}{2}(2\pi(m-n)d_t\sin(\theta_t)\sigma_t)^2} \tag{5}$$

其中 θ_t 为平均离开角 (AOD)，σ_t^2 为发射端的角度扩展(AS)。d_t 为天线间距与波长之比。图 1 为 $\theta_t=\pi/2$ 时，相关系数与天线间距与波长比及角度扩展的关系。可以看出在天线间距与波长比及 θ_t 固定的情况下，相关性随角度扩展的增加而减小。这表明在发射端散射环境较弱时(AS 小)，天线间的相关性强，而散射环境较强时(AS 大)，天线间的相关性弱。

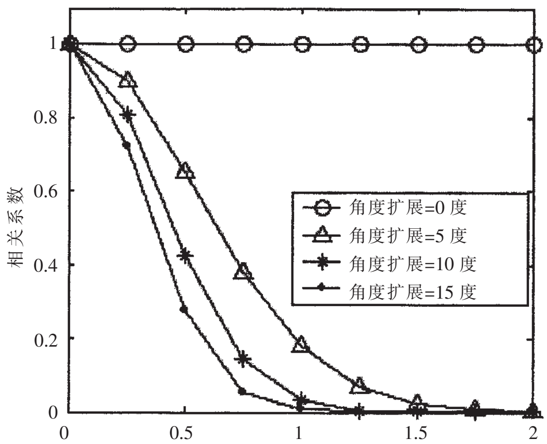

图 1 相关系数与角度扩展关系

2 ZF 接收机信噪比的统计特性

假定接收端采用 ZF(迫零)算法,则接收信号(1)式可以写为:

$$\boldsymbol{y}[m]=\sum_{i=1}^{t}\boldsymbol{h}_i x_i[m]+\boldsymbol{w}[m] \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{h}_1,\cdots,\boldsymbol{h}_t$ 为信道矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的列向量,即 $\boldsymbol{H}=[\boldsymbol{h}_1,\cdots,\boldsymbol{h}_t]$,$x_i[m]$为第 m 个时刻第 i 个天线的发射符号。对第 k 个数据流,上式可写为:

$$\boldsymbol{y}[m]=\boldsymbol{h}_k x_k[m]+\sum_{i\neq k}^{t}\boldsymbol{h}_i x_i[m]+\boldsymbol{w}[m] \tag{7}$$

接收端采用迫零均衡器 $\boldsymbol{G}$,则:

$$\boldsymbol{G}=(\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H})^{-1}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}} \tag{8}$$

则 $\boldsymbol{GH}=\boldsymbol{I}_t$,第 k 个子信道的信噪比可以写为:

$$\gamma_k=\frac{1}{N_0\left[(\boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}})\right]_{kk}}=\frac{1}{N_0\left[(\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H})^{-1}\right]_{kk}} \tag{9}$$

为研究 γ_k 的统计特性,由方程(7)将信道矩阵作以下分块,即 $\boldsymbol{H}=[h_k;\hat{\boldsymbol{H}}]$,$\hat{\boldsymbol{H}}$由 $\boldsymbol{H}$ 中 $i\neq k$ 的各列向量组成。方程(9)可以写为:

$$\gamma_k=\frac{1}{N_0}\boldsymbol{h}_k^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{I}_r-\hat{\boldsymbol{H}}(\hat{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{H}}\hat{\boldsymbol{H}})^{-1}\hat{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{H}})\boldsymbol{h}_k \tag{10}$$

由文献[9],γ_k 的分布可表示为:

$$\gamma_k\cong\frac{1}{N_0\left[(\boldsymbol{T})^{-1}\right]_{kk}}\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{I}_r-\boldsymbol{B})\boldsymbol{\mu}=\alpha_k\,\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{I}_r-\boldsymbol{B})\boldsymbol{\mu} \tag{11}$$

其中 $\alpha_k=\frac{1}{N_0\left[(\boldsymbol{T})^{-1}\right]_{kk}}$,$\boldsymbol{B}=\hat{\boldsymbol{H}}_w(\hat{\boldsymbol{H}}_w^{\mathrm{H}}\hat{\boldsymbol{H}}_w)^{-1}\hat{\boldsymbol{H}}_w^{\mathrm{H}}$,可以证明 $\boldsymbol{B}$ 是幂等矩阵。

证明:令 $\boldsymbol{B}=\hat{\boldsymbol{H}}_w(\hat{\boldsymbol{H}}_w^{\mathrm{H}}\hat{\boldsymbol{H}}_w)^{-1}\hat{\boldsymbol{H}}_w^{\mathrm{H}}$,则:

$$\boldsymbol{B}^2=\hat{\boldsymbol{H}}_w(\hat{\boldsymbol{H}}_w^{\mathrm{H}}\hat{\boldsymbol{H}}_w)^{-1}\hat{\boldsymbol{H}}_w^{\mathrm{H}}\times\hat{\boldsymbol{H}}_w(\hat{\boldsymbol{H}}_w^{\mathrm{H}}\hat{\boldsymbol{H}}_w)^{-1}\hat{\boldsymbol{H}}_w^{\mathrm{H}}$$
$$=\hat{\boldsymbol{H}}_w(\hat{\boldsymbol{H}}_w^{\mathrm{H}}\hat{\boldsymbol{H}}_w)^{-1}\hat{\boldsymbol{H}}_w^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{B}$$

由此可推得 $\boldsymbol{I}_r-\boldsymbol{B}$ 也是幂等矩阵。由于幂等矩阵其特征值为 1 或零,故 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{B})=t-1$,则 $n=\mathrm{rank}(\boldsymbol{I}_r-\boldsymbol{B})=r-t+1$,由文献[12]高斯随机变量二次型定理可知 γ_k 具有自由度为 n 的 χ^2 分布,由此可推导出其概率密度函数为:

$$p(\gamma_k)=\frac{e^{-\gamma_k/\alpha_k}}{\alpha_k\Gamma(n)}\left(\frac{\gamma_k}{\alpha_k}\right)^{n-1}=\frac{e^{-\gamma_k/\alpha_k}}{\alpha_k\Gamma(n)}\left(\frac{\gamma_k}{\alpha_k}\right)^{r-t} \tag{12}$$

其中,$\Gamma(n)$为 gamma 函数。而对于等收发天线的系统 $r=t$,则 $n=1$,(12)式将退化为指数分布,即:

$$p(\gamma_k)=\frac{1}{\alpha_k}e^{-\gamma_k/\alpha_k} \tag{13}$$

由此推导出了采用 ZF 接收机时,各子数据流 SNR 的概率密度函数。下面采用 MPSK 调制,推导各子数据流的误符号率。

3 ZF 接收机的误符号率

下面考虑当发射信号采用 MPSK 调制时,第 k 个子数据流的误符号率,可利用如下结果[13]:

$$P_{k,Mpsk}(\gamma_k)=\mathrm{erfc}\left(\sqrt{\gamma_k}\,\sin\frac{\pi}{M}\right) \tag{14}$$

则 k 个子数据流的平均误码率为:

$$P_{k,MPSK}=\int_0^{\infty}p_{k,Mpsk}(\gamma_k)p(\gamma_k)\mathrm{d}\gamma_k$$
$$=\int_0^{\infty}\mathrm{erfc}\left(\sqrt{\gamma_k}\,\sin\frac{\pi}{M}\right)\frac{e^{-\gamma_k/\alpha_k}}{\alpha_k\Gamma(n)}\left(\frac{\gamma_k}{\alpha_k}\right)^{r-t}\mathrm{d}\gamma_k$$
$$=\left[1-\frac{2\sqrt{\alpha_k}\cdot\sin\frac{\pi}{M}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n)}{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}+n;\frac{3}{2};-\alpha_k\sin^2\frac{\pi}{M}\right)\right] \tag{15}$$

式中,${}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}+n;\frac{3}{2};-\alpha_k\sin^2\frac{\pi}{M}\right)$是高斯超几何函数,定义见附录。

若采用 BPSK 调制,其误码率为[13]:

$$p_2(\gamma_k)=\frac{1}{2}\mathrm{erfc}\left(\sqrt{\gamma_k}\right) \tag{16}$$

由此可以求得 k 个子信道的误码率为:

$$p_{k,BPSK}=\int_0^{\infty}p_2(\gamma_k)p(\gamma_k)\mathrm{d}\gamma_k$$
$$=\frac{1}{2}\left[1-\frac{2\sqrt{\alpha_k}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n)}{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}+n;\frac{3}{2};-\alpha_k\right)\right] \tag{17}$$

对比(15)式和(17)式,可以发现,进行计算时对采用 BPSK 的系统,若用(15)式计算则应除以 2(对 BPSK,$M=2$)。对于非相关平衰落信道,对应 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{I}_t$,若采用 1×1 即单发单收系统,则(17)式的结果为:

$$p_{k,BPSK}=\frac{1}{2}\left[1-\sqrt{\frac{\alpha_k}{1+\alpha_k}}\right] \tag{18}$$

与文献 [13] 给出瑞利衰落信道下误符号率结果完全一致。

对于 $r=t$ 的系统,则(15)式可以简化为下式:

$$p_{k,BPSK}=\int_0^{\infty}p_{k,MPSK}(\gamma_k)p(\gamma_k)\mathrm{d}\gamma_k=1-\sqrt{\frac{\alpha_k\sin^2\frac{\pi}{M}}{1+\alpha_k\sin^2\frac{\pi}{M}}} \tag{19}$$

由上面的分析可知，在存在发射相关的情况下，各子数据流误符号率与 α_k 有关，而 α_k 决定于发射相关矩阵逆矩阵的对角元素。因此存在发射相关情况下，各子数据流误符号率与发射相关矩阵逆矩阵的对角元素有关，而不是其特征值。

以上针对各种情况，给出了采用 ZF 均衡器时第 k 个数据流的误符号率，则系统总误符号率可用下式计算：

$$P=\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{t}p_{k,MPSK} \tag{20}$$

4 仿真结果与分析

(1)仿真时采用的模型由本文第一部分给出，随机产生 20 000 个信道样本，利用(9)式或(10)式，计算其中一个子流的信噪比，并统计求其概率密度。图 2 在信噪比等于 10dB，$\theta_t=\frac{\pi}{2}$，角度扩展 $\sigma_t^2=5^\circ$，$d_t=\frac{1}{2}$，天线配置分别采用 2×2，4×2，6×2 时，对比了仿真给出的 pdf 与(12)、(13) 式给出的理论值的结果。对 2×2 的系统其 SNR 分布为指数分布，而对于等收发天线的系统其 SNR 分布与 2×2 的系统具有相同的分布。对 4×2，6×2 的系统其 SNR 的分布分别服从自由度为 3 和 5 的 χ^2 分布，由图 2 可以看出仿真曲线与理论曲线基本吻合，可见本文理论分析结果的正确性。

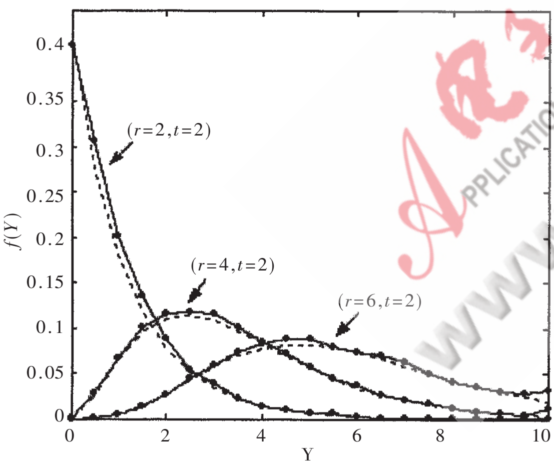

图 2 第 k 个数据流 SNR 的 pdf
(实线为仿真曲线，虚线为理论曲线)

(2)图 3 在 $\theta_t=\frac{\pi}{2}$，角度扩展 $\sigma_t^2=5^\circ$，$d_t=\frac{1}{2}$，天线配置采用 2×2，4×2，6×2，系统采用 8PSK 调制时，给出仿真的误符号率曲线与(15)、(19)式给出的理论曲线的对比结果，可以看出，两者基本吻合。

(3)图 4 在天线配置采用 4×4，8PSK 调制时，分析了 $\theta_t=\frac{\pi}{2}$，$d_t=\frac{1}{2}$，角度扩展分别为 2°、5°、10°以及完全不相关信道(对应 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{I}_t$)的误符号率与角度扩展间的关系，从图中可以看出当角度扩展<5°，对应发射端散射环境较弱时，由发射相关对系统的误码率影响较大，这时可通

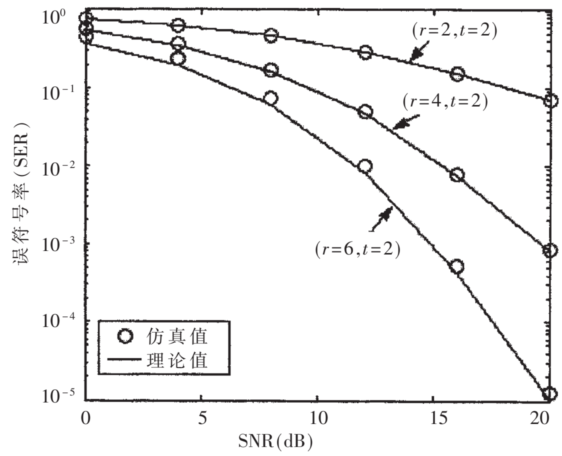

图 3 不同天线配置下仿真误符号率与理论值对比

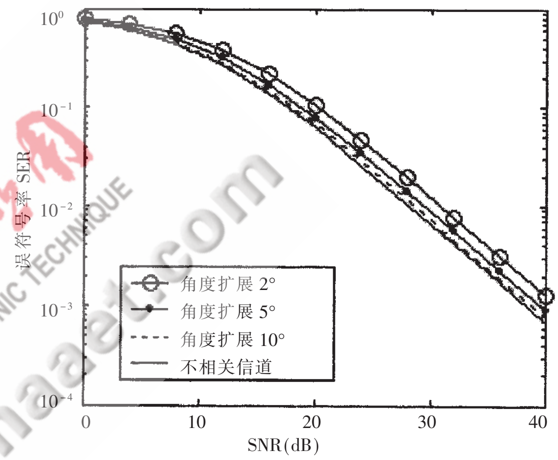

图 4 角度扩展对误符号率的影响

过增加天线间距来降低误符号率；当角度扩展>5°，对应发射端散射环境较强时，发射相关矩阵对系统的误码率影响较小，与完全不相关信道相比，其影响可以忽略。

参考文献

[1] EMLRE T. Capacity of multi-antenna gaussian channel[J]. European Trans, Telecommun.,1999,10(6):586-595.

[2] WOLNIANSKY, FOSCHINI, GOLDEN, et al. V-BLAST: an architecture for realizing very high data rates over the rich-scattering wireless channel[A]. Proc IEEE ISSSE'98 [C]. Pisa, Italy, 1998:295-300.

[3] LEIF W H, ALEX JU G. Optimal transmit covariance for ergodic MIMO channels[J]. Proc.IEEE Intl.Symp. Inform. Theory, ISIT, Sept. 2005.

[4] DANIEL P P, JOHN M C. Joint Tx-Rx beamforming design for multicarrier MIMO channels: A unified framework for convex optimization[J], IEEE Transactions on Signal Processing,2003,51(9):2381-2400.

[5] KOTECHA J H, SAYEED A M. Transmit signal design for optimal estimation of correlated MIMO channels[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2004,(2).

[6] VU M, PAULRAJ A.Capacity optimization for rician corr-

elated MIMO wireless channels[A]. Proc.39th Asilomar Conf.Sig.Sys.and Comp,Nov.2005.

[7] WINTERS J H, SALZ J, GITLIN R D. The impact of antenna diversity on the capacity of wireless communication systems[J]. Transactions on communications, 1994,42: 1740-1751.

[8] GORE D, HEATH R W Jr. Transmit selection in spatial multiplexing systems[J].IEEE communications Letters,2002, 6(11):491-493.

[9] MARIO K, JOACHIM S. Analytical performance of MIMO zero-forcing receivers in correlated rayleigh fading environment[C], IEEE Signal Processing Advances in Wireless Communication, 2003,(6).

[10] LIU Hua Ping, SONG Yongxhong, ROBERT C Q. The impact of fading correlation on the error performance of MIMO systems over rayleigh fading channels[J]. IEEE Transactions on wireless communications,2005,4(5): 2014-2019.

[11] BOLCSKEI H,BORGMANN M, PAULRAJ A J. Impact of the propagation environment on the performance of space-frequency coded MIMO-OFDM[J], IEEE J. Select. Areas Commun.,2003,21(3):427-439.

[12] 罗鹏飞,张文明.统计信号处理基础-估计与检测理论[M].北京:电子工业出版社, 2003.

[13] 张力军,张宗橙,译.数字通信(第四版)[M]. 北京:电子工业出版社, 2003.

(收稿日期:2006-12-26)