

非均匀采样信号的频谱分析及信号处理系统

汪安民^{1,2}, 陈良福²

(1.清华大学 电子工程系,北京 100083; 2.清华同方电子信息技术研究,北京 100083)

摘要: 非均匀采样由于具有不受采样频率限制、频率分辨率高以及抗混叠等优点,应用十分广泛。推导出非均匀采样信号的离散傅里叶变换方法,分析了采样时钟抖动对非均匀离散傅里叶变换的影响,并给出仿真结果。研制了基于数字信号处理器和可编程逻辑器件的非均匀采样系统,以此为硬件平台,实现了非均匀采样信号的频谱分析。理论和实验结果表明,非均匀采样系统和频谱分析方法是有效实用的。

关键词: 非均匀采样 信号处理 频谱分析

非均匀采样是相对于均匀采样的一种采样方法。现实中,由于受到电子器件的限制,均匀采样是相对的,而非均匀采样是绝对的。香农采样定理描述了均匀采样问题,确定了均匀采样下被采样信号最高频率必须低于采样频率的一半,否则无法准确地恢复出信号^[1]。均匀采样信号的频谱分析可以采用经典的傅里叶变换方法实现。对于非均匀采样,因其采样时刻的不确定性,无法直接使用傅里叶变换实现。

本文提出一种伪随机的加性非均匀采样方法,推导出非均匀采样信号的傅里叶变换方法,并使用该方法分析非均匀采样信号的频谱。本文还研制出基于数字信号处理器(DSP)和可编程逻辑器件(CPLD)的非均匀采样和信号处理系统。在该硬件系统上,实现了非均匀采样信号的频谱分析。

1 非均匀采样

在加性非均匀采样中,当前采样时刻是根据前一个采样时刻来选择的,其数学表达式为:

$$t_{n+1} = t_n + \tau_n \quad (1)$$

其中, τ_n 为服从同分布的一组随机变量,其值恒为正。设 τ_n 的概率密度函数为 $p_\tau(\tau_n)$, 其均值为 μ , 由于 $t_n = t_0 + \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n$, 故 $p_n(t) = p_{n-1}(t) \times p_\tau(t)$ 。根据中心极限定理,对于一组相互独立的随机变量,当随机变量的个数大到一定程度时,它们的和服从正态分布,因此当 $k \rightarrow \infty$ 时, $p_n(t)$ 趋于正态分布。当 t 增加时,加性非均匀采样点的概率分布将趋于平坦,其数值大小为 $1/\mu$ 。

由于 τ_n 随机分布,使得采样时刻不再是简单的线性关系。设置 $t_0 = 1\text{ms}$, τ_n 为均匀分布在 $(0\text{ms}, 1\text{ms})$ 之间的随机数。式(1)变为下式:

$$t_n = n + \tau_n \quad n=1, 2, 3, \dots, N \quad (2)$$

假定三正弦合成信号如下:

$$y(t) = \sin(2\pi f_0 t) + \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t) \quad (3)$$

式中, $f_0 = 200\text{Hz}$, $f_1 = 700\text{Hz}$, $f_2 = 1100\text{Hz}$ 。在均匀采样下,采样频率为 1024Hz , 采样点数为 1024 , 并对采样后的信号由傅里叶变换得到信号频谱,如图1所示。在非均匀采样下,按照式(2)定义的时刻采样 1024 点,并使用非均匀采样信号的傅里叶变换得到信号频谱,如图2所示。式(2)的平均采样时间间隔为 1.5ms (对应采样频率为 667Hz), 最大采样时间间隔为 1ms (对应采样频率为 1000Hz)。以最大采样频率计算, f_1 和 f_2 都超过了香农采样定理的限制。

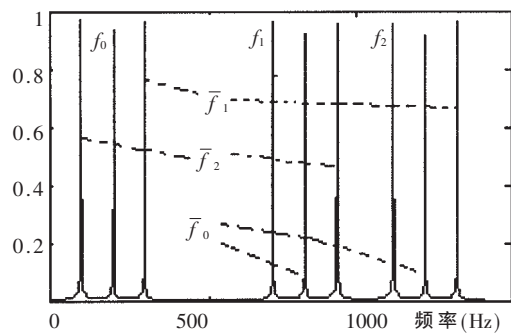


图1 均匀采样的信号频谱

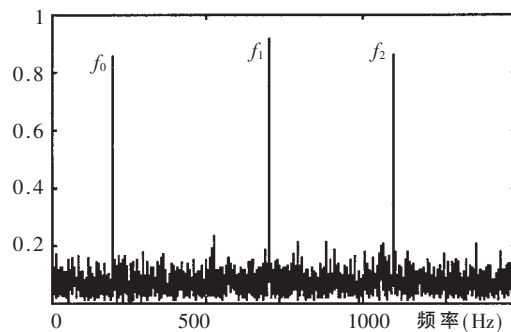


图2 非均匀采样的信号频谱

比较图1和图2,均匀采样出现了频谱混叠现象,原因有两点:(1)信号中存在超过一半采样频率的信号成分;(2)均匀采样的周期性使得信号出现频谱周期。从图

1 中无法分辨哪个是真实信号,哪个是混叠信号的频谱。(实际情况下,图 1 中 \bar{f}_0 、 \bar{f}_1 和 \bar{f}_2 分别是真实信号 f_0 、 f_1 和 f_2 的混叠信号)。

为了消除频谱混叠现象,采用非均匀采样,采样不再有周期性,而是呈随机性。从图 2 中可以看出,信号频谱没有混叠现象,即使此时信号中存在超过采样频率的信号成分,非均匀仍然可以准确地检测出信号。

从图 2 还可以看出,非均匀采样出现一定幅值的频谱噪声,这是非均匀采样的一个缺点。其主要原因是采样时间随机设置,每个采样时刻的采样频率都不一样,混叠信号根据不同的采样频率分布到不同的频率点。也就是在每个采样时刻,仍然存在均匀采样的频谱混叠现象。但是每个采样时刻都非常短,使得当前时刻的混叠频谱的能量较小,反映到频谱上的幅度较小。总的来看,由于采样频率随机分布,使得混叠信号随机分布,最终表现出整个频谱出现小幅度噪声。实际上,相当于将图 1 中的混叠频谱均匀分布到整个频率段,大大减小了混叠频谱的幅度,远远低于真实信号频谱的幅度,从而检测出真实信号。

2 非均匀采样的傅里叶变换

如果信号 $f(t)$ 满足下列条件:(1) $f(t)$ 绝对可积,即 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty$; (2) 在任何有限区间内, $f(t)$ 只存在有限个数目的最大值和最小值; (3) 在任何有限区间内, $f(t)$ 有有限个数目的不连续点,并且每个不连续点都必须是有有限值,则 $f(t)$ 的傅里叶变换存在。当 $f(t)$ 经过采样后,得到离散序列 $f(nT)$,其中 T 为采样周期。用 $f(n)$ 代表 $f(nT)$,则序列 $f(n)$ 的离散时间傅里叶变换表示如下^[2]:

$$F(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f[n]e^{-j\omega n} \quad (4)$$

根据采样定理,时域上的采样,将使信号频谱在频域上发生搬移,若采样频率大于奈奎斯特频率,则不会发生频谱重叠。从而

$$F_p(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(j(\omega - k\omega_s)) \quad (5)$$

其中, $F_p(e^{j\omega})$ 为采样后得到的离散序列的频谱, T 为采样周期, ω_s 为采样频率(角频率)。假设非均匀采样的各个采样点是随机的,且相互独立,其概率密度分布函数为 $p(t)$,采样点数为 N ,则

$$\begin{aligned} E \left\{ \sum_{k=1}^N f(t_k) e^{-j\omega t_k} \right\} &= \sum_{k=1}^N E \left\{ f(t_k) e^{-j\omega t_k} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_k) e^{-j\omega t_k} p(t_k) dt_k \end{aligned} \quad (6)$$

如果 $p(t)$ 在信号持续时间上服从均匀分布,则

$$\sum_{k=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_k) e^{-j\omega t_k} p(t_k) dt_k = \frac{1}{T_d} \sum_{k=1}^N \int_0^{T_d} f(t_k) e^{-j\omega t_k} dt_k$$

$$= \frac{N}{T_d} \int_0^{T_d} f(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{N}{T_d} F(j\omega) \quad (7)$$

其中 T_d/N 为平均采样时间。将式(7)代入式(6),并结合式(5),可知

$$E[F(e^{j\omega})] = N/T_d \times F(j\omega) \quad (8)$$

即非均匀离散傅里叶变换公式计算结果的期望是原始信号频谱。

由于采样时刻的随机性,虽然计算得到的信号频谱的期望是信号的真实频谱,但还必须考察频谱计算的精度。非均匀离散傅里叶变换的方差推导如下^[3]:

令 $X_D(\omega)$ 代表由非均匀离散傅里叶变换计算得到的频谱, $X_c(\omega)$ 代表信号的实际频谱,则

$$\text{var}\{X_D(\omega)\} = E\{[X_D(\omega)]^2\} - [E\{X_D(\omega)\}]^2 \quad (9)$$

假设所设置的采样时刻 $\{t_k\}$ 为相互独立、同分布的随机变量,并且其概率密度函数为 $p(t)$,故

$$\begin{aligned} E\{[X_D(\omega)]^2\} &= E\left\{ \left[\sum_{k=1}^N f(t_k) e^{-j\omega t_k} \right]^2 \right\} \\ &= \sum_{k=1}^N E\{f(t_k) e^{-j\omega t_k} \cdot f(t_k) e^{-j\omega t_k}\} \\ &\quad + \sum_{k=1}^N \sum_{l=k}^N E\{f(t_k) e^{-j\omega t_k} \cdot f(t_l) e^{-j\omega t_l}\} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\sum_{k=1}^N E\{f(t_k) e^{-j\omega t_k} \cdot f(t_k) e^{-j\omega t_k}\} = N \cdot \int_0^T [f(t) e^{-j\omega t}]^2 \cdot p(t) dt \quad (11)$$

$$\sum_{k=1}^N \sum_{l=k}^N E\{f(t_k) e^{-j\omega t_k} \cdot f(t_l) e^{-j\omega t_l}\} = N(N-1) X_c(\omega) X_c^*(\omega) \quad (12)$$

将式(10)、(11)和(12)代入式(9),可得

$$\text{var}\{X_D(\omega)\} = \left\{ T \int_0^T [f(t) e^{-j\omega t}]^2 dt - X_c(\omega) X_c^*(\omega) \right\} / N \quad (13)$$

3 实时非均匀采样处理系统

非均匀采样系统由 DSP (TI 公司的 TMS320C6211)、AD、CPLD、USB 接口、FLASH 等组成^[4]。硬件系统框图如图 3 所示。

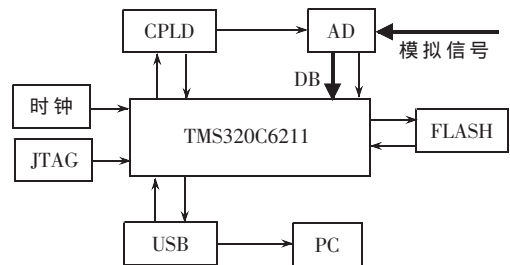


图 3 硬件系统框图

图 3 中,时钟芯片提供均匀时钟到 DSP 和 CPLD,作为 DSP 和 CPLD 的工作时钟。DSP 对时钟信号倍频后输出一个快速的时钟信号到 CPLD,CPLD 以该时钟为最小时间片,进行延时和分频,得到非均匀的时间片。这些时间片之间间隔发送到 DSP 芯片中,供非均匀采样算法随时调用。

系统软件框图如图 4 所示。系统上电初始化后,启

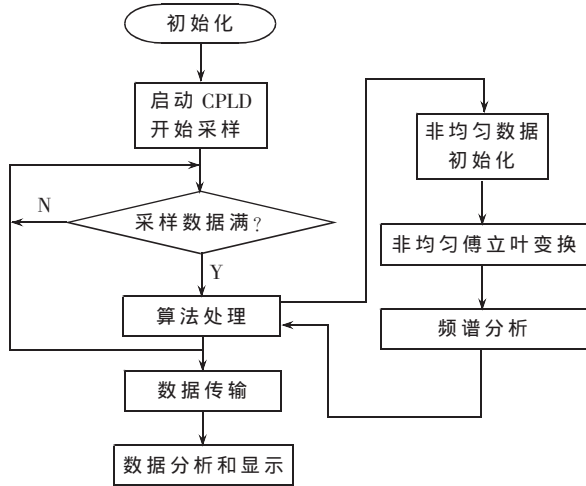


图 4 系统软件框图

动 CPLD。CPLD 收到 DSP 命令后,输出非均匀时钟信号到 AD,AD 根据该时钟信号采样,每采样一个数据,提供一个中断信号到 DSP。DSP 收到该中断信号,从数据总线读取数据,并保存在 DSP 的 RAM 单元,直到采样数据达到设定的数据个数。采样数据存储器满后,由 DSP 读取后进行非均匀的算法处理,算法处理的详细步骤包括三步:(1)非均匀采样数据的初始化,主要完成对采样数据时间间隔的处理,得到准确的时间间隔;(2)傅里叶分析,对时域的采样数据进行傅里叶分析,将时域信号转换成频域信号;(3)将处理后的结果由 DSP 经过数据传输单元通过 USB 接口传输到 PC 机,PC 机对数据进行简单的分析并显示。

该系统的非均匀采样频率为 1.25M~1.50MHz、采样 1024 点,采样数据经 DSP 算法处理后,将处理后的结果输出到 PC 机,在 PC 机上绘出频谱,实验中使用函数信号发生器产生不同频率的单频信号,在不同频率下进行一系列实验。图 5 是输入 18.655MHz 的正弦信号。图中

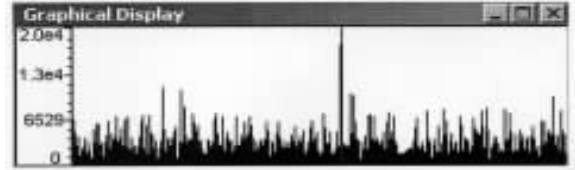


图 5 输入 18.655MHz 的正弦信号

横坐标为频率,最大值点对应的频率为 18.75MHz,检测误差为 0.51%。

非均匀采样由于采样时间的随机性,最大程度地降低了均匀采样引起的混叠现象,使得采样不再受限于采样定理。由于采样时间的随机性,使得非均匀采样信号的频谱分析不能直接使用均匀采样信号的傅里叶变换方法。本文推导出非均匀采样信号的傅里叶变换方法并分析了其精度。非均匀采样系统的研制主要受限于 AD 器件,目前还没有非均匀 AD 器件可以使用,为此,本文采用 CPLD 控制 AD 的时钟实现了非均匀采样。在非均匀采样系统平台上,应用非均匀采样信号的傅里叶变换分析了信号频谱,验证了非均匀采样信号的傅里叶分析方法和非均匀采样系统的有效性。

参考文献

- 1 Shannon C E. Communication in the presence of noise. Proc. IRE, 1949; 37(1): 10~21
- 2 Alan J. Coulson. A generalization of nonuniform bandpass sampling. IEEE Trans. on signal processing, 1995; 43(3): 694~704
- 3 Farokh Marvasti, Tsun Jen Lee. Analysis and recovery of sample-and-hold and linearly interpolated signals with irregular samples. IEEE Trans. on signal processing. 1992; 40(8): 1884~1891
- 4 汪安民,程昱. DSP 实用子程序集. 北京:人民邮电出版社, 2005 (收稿日期: 2006-05-20)

(上接第 117 页)

除此之外,还要注意以下问题:

(1) IIR 数字滤波器是针对采样率固定的系统设计的,更改系统或系统采样率改变时应重新设计。

(2) 用到的数据存储单元,程序开始时应对这些单元进行初始化。如果要进行连续滤波,应保存上一次滤波的结果。

(3) IIR 数字滤波器的滤波结果会引起相位的延迟,故对相位严格要求的场合,需加全通网络进行校正,或选用 FIR 滤波器实现滤波功能。

IIR 数字滤波器以它优越的性能,在电力、通信和测控等领域得到广泛应用。本文针对 TI 公司的 TMS320VC5416 DSP,叙述了 IIR 数字滤波器的理论设计及在 DSP 上的实现过程。根据其实现思路,可以很方便设计出符合要求的滤波器。该方法具有很强的实用性,

对 FIR 滤波器的设计及滤波器在嵌入式系统中的实现也有很好的参考价值。通过“变压器绝缘套管介损在线监测”等测控系统中的滤波器设计和实现表明,设计方法简单、方便、实现灵活,满足工程实际要求。

参考文献

- 1 邢培育,崔克清.一种基于 TMS320C5402 的数字 IIR 滤波器设计[J].数据采集与处理,2002; 17(2): 227~230
- 2 张雄伟,曹铁勇. DSP 芯片的原理与开发应用(第 2 版) [M].北京:电子工业出版社,2001
- 3 高宇晨,戴居丰.改进的 IIR 滤波器避免运算溢出和定点 DSP 的实现[J].天津通信技术,2001; (3): 31~34
- 4 陈爱萍,胡晓东.基于 MATLAB 的 IIR 数字滤波器的设计 [J].湖南工程学院学报,2004; 14(3): 8~10
- 5 成跃乐,李东兴,王文畅. MATLAB6.1 环境下 IIR 数字滤波器的设计[J].山东理工大学学报(自然科学版),2003; 17(5): 82~85 (收稿日期: 2006-05-26)