一阶 IIR 数字滤波器时域滤波效果模拟

tzl1963

摘要－ 供初学如何设计实际的数字滤波器参考。

一，基本概念

FIR Filter－有限长单位脉冲响应滤波器，传递函数：

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n} \quad ; \tag{1}$$

$h(n)$ 是一个有限长序列。

IIR Filter－无限长单位脉冲响应滤波器，传递函数：

$$H(z)=\frac{\sum_{i=0}^{N}a_i z^{-1}}{1-\sum_{i=0}^{N}b_i z^{-1}} \quad ; \tag{2}$$

二，冲激响应不变法

设模拟滤波器的冲激响应是 $h_A(t)$，取样周期是 T，则它的取样冲击响应是 $h_A(nT)$。

又设数字滤波器的冲击响应是 $h(n)$。如果让

$$h(n)=h_A(nT) \tag{3}$$

这就是冲激响应不变法，物理概念就是让数字滤波器的冲激响应等于对应的模拟滤波器冲激响应的抽样函数。

模拟滤波器的传递函数是它的冲激函数的拉氏变换，数字滤波器的传递函数的它的冲激函数的 z 变换。

$$\left.\begin{array}{l} L[h_A(t)]=H(s) \\ Z[h(n)]=H(z) \end{array}\right\} \tag{4}$$

将（3）式两端做 z 变换，

$$H(z)\big|_{z=e^{sT}}=\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}H(s+j\frac{2\pi}{T}m) \quad ; \tag{5}$$

因此，数字滤波器的频响

$$H(e^{j\omega})=\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}H(j\frac{\omega+2\pi m}{T})$$

$$\triangleq \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} H(j\Omega) \quad ; \tag{6}$$

冲激响应不变法数字滤波器的频响是模拟滤波器频响的周期函数。
如果模拟滤波器的频率响应是带限于折叠频率之内，即当

$$\left|\Omega\right| \ge \frac{\pi}{T} \text{时，有} \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} H(j\Omega) = 0 \quad ; \tag{7}$$

数字滤波器的频响可以不失真的重现模拟滤波器的频响，即当$\left|\omega\right| < \pi$时有

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} H(j\frac{\omega}{T}) \quad ; \left|\omega\right| < \pi \quad ; \tag{8}$$

对于能表达成单极点模拟滤波器的传递函数滤波器，可以写成部分分式，

$$H(s) = \sum_{i=1}^{N} \frac{G_i}{s - s_i} \quad ; \tag{9}$$

其拉氏反变换，

$$h_A(t) = \sum_{i=1}^{N} G_i e^{S_i t} u(t) \quad ; \tag{10}$$

$u(t)$是单位阶跃函数。

对（10）采样就得到数字滤波器的冲激响应函数，

$$h(n) = h_A(nT) = \sum_{i=1}^{N} G_i e^{S_i nT} u(n) = \sum_{i=1}^{N} G_i (e^{S_i T})^n u(n) \quad ; \tag{11}$$

再对（11）式取 z 变换，

$$H(z) = \sum_{i=1}^{N} \frac{G_i}{1 - e^{S_i T} z^{-1}} \quad ; \tag{12}$$

这就得到了从模拟到数字的冲激函数转换。
本实验是一个原型模拟一阶低通滤波器传递函数，

$$H(s) = \frac{G}{s + s_c} = \frac{G}{s + \omega_c} \quad ; \tag{13}$$

根据（9）和（12）式之间的对应关系，可以得到数字滤波器的传递函数，

$$H(z) = \frac{G}{1 - Bz^{-1}} = \frac{G}{1 - e^{-\omega_C T} z^{-1}} \quad ; \tag{14}$$

$$B = e^{-\omega_C T} = \exp(-\omega_C T) = \exp(-2\pi f_C T) \quad ; \tag{15}$$

可以验证 f_C 是 3dB 带宽截频，T 是取样周期。

由冲激函数（14）式写出该数字滤波器的序列公式如下：

$$y(n)=G\cdot x(n)+B\cdot y(n-1) \quad ; \tag{16}$$

并由此算出直观的算法流程图，

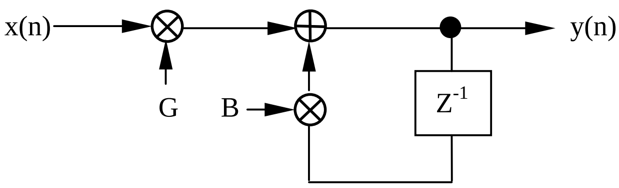

图 1，冲激不变法一阶数字滤波器

设信号的基本周期为 1 秒，取 $f_C = 1Hz$ ，取样周期取 $T=\dfrac{1}{40}$ 秒。

$$B=\exp(-2\pi f_C T)=\exp(-\frac{\pi}{20})\approx 0.85464\approx 2^0-2^{-3}-2^{-6}$$

用二进制数表示系数实质上是相当于量化处理。增益系数 G 这样来确定，使直流的传递函数 $H(1)\le 1$;便于用单板机做定点运算。

$z=1$ 时 $\omega=0$ （直流），如果假设 G=1,有 $H(1)=\dfrac{1}{1-B}=6.879>1$ ；

如果假设 G=2^{-3}，有 $H(1)=\dfrac{2^{-3}}{1-B}=0.85991<1$，选用。

选取好了系数并“ 量化 ”了系数后的序列表达式，

$$y(n)=2^{-3}\cdot x(n)+(2^0-2^{-3}-2^{-6})\cdot y(n-1) \quad ; \tag{17}$$

Z80 单板机只有 8 位，用它做定点原码运算，数据格式如下，

2^0	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-5}	2^{-7}

数据格式：让 8 位最高位二进数表示的数 128 对应于 10 进数 1.0，可以算出，

十进制数	对应 8 位二进数	16 进制数
0.1	128x0.1=13	0DH
0.2	128x0.2=25	19H
0.3	128x0.3=38	26H
0.4	128x0.4=51	33H
0.5	128x0.5=64	40H
0.6	128x0.6=77	4DH
0.7	128x0.7=90	5AH
0.8	128x0.8=102	66H
0.9	128x0.9=115	73H
1.0	128x1.0=128	80H

数据存储：将用机器码表示的程序和输入数据，滤波运算后的数据指定一个存取空间，如果有 A/D 和 D/A 变换器进行实时处理，就不需要有那麽多数据空间。

地址（16 进制数）

3000
…
…
303F
程序存储区

3040	x_0	输入数据存取区（只用了 40 个输入数据，重复使用）。这里使用 40 个数据构成一个周期的矩形方波。
…		
…		
3067	x_{39}	

306A	y_0	输出数据存放区(算 5 个周期需要 200 个，其余类推)。
306B	y_1	
…		
…		

汇编程序：

地址	机器码	标号	Z80 助记符	说明
3000	16 05		LD D, 05H	拟重复 5 个周期，计数→D
3002	DD 21 40 30		LD IX, 3040H	
3006	21 40 30	LOOP：	LD HL, 3040H	建立输入数据 x(n)的地址指针
3009	06 27		LD B, 27H	输入数据的个数
300B	DD 7E 2A	FILTER：	LD A, (IX+2A)	取 y(n-1)→C
300E	4F		LD C, A	
300F	CB 39		SRL C	
3011	CB 39		SRL C	$y(n-1).2^{-3}$
3013	CB 39		SRL C	
3015	91		SUB C	$y(n-1)-y(n-1).2^{-3}$
3016	CB 39		SRL C	
3018	CB 39		SRL C	$y(n-1).2^{-3}.2^{-3}$
301A	CB 39		SRL C	
301C	91		SUB C	$y(n-1)[1-2^{-3}-2^{-3}.2^{-3}]=B.y(n-1)$
301D	4F		LDC, A	将 By(n-1)→C
301E	23		INC HL	指向 x(n)的地址
301F	7E		LD A, (HL)	x(n)→A
3020	CB 3F		SRL A	
3022	CB 3F		SRL A	$x(n).2^{-3}$
3024	CB 3F		SRL A	
3026	81		ADDA, C	$2^{-3}x(n)+B.y(n-1)=y(n)\rightarrow A$
3027	DD 23		INC IX	送 y(n)
3029	DD 77 2A		LD (IX+2A), A	
302C	10 DD		DJNZ, FILTER	指向下一个采用数据
302E	15		DEC D	须计算的周期数未算完返回
302F	20 D5		JRNZ, LOOP	LOOP
3031	76		HALT	算完停机

地址 300B－302C 的程序运算时间是两个采样值之间的时间，根据 Z80 计算出是 279 个时钟周期，在所采用的单板机中约 140μs，据此可求得最大允许采样频率：

$$f_{S\max} = \frac{1}{140 \times 10^{-6}} \approx 7.14KHz \quad ; \qquad (18)$$

在给定地址输入数据 x(0)→x(39)：

地址(H)	数据(H)	地址(H)	数据(H)	地址(H)	数据(H)	地址(H)	数据(H)
3040	00	304A	80	3054	80	305E	00
3041	19	304B	80	3055	66	305F	00
3042	26	304C	80	3056	5A	3060	00
3043	33	304D	80	3057	4D	3061	00
3044	40	304E	80	3058	40	3062	00
3045	4D	304F	80	3059	33	3063	00
3046	5A	3050	80	305A	26	3064	00
3047	66	3051	80	305B	10	3065	00
3048	80	3052	80	305C	00	3066	00
3049	80	3053	80	305D	00	3067	00

当程序和数据输入完毕后，运行程序，设定的计算 5 个周期共得到 200 个输出数据。这 200 个数据是用 16 进制表示的。为了作图先将它还原成 10 进制，再除以 128 使其小于 1。比如，2B=43, 43/128=0.34; 5D=93, 93/128=0.73; ……

图 3 中曲线 1 和 2 是输入数据和脉冲响应不变法一阶滤波后的情况。

三，双线性变换法

建立一个变换函数

$$s = k\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad ; \qquad (19)$$

原型模拟低通仍然取前例的形式和参数。

$$H(s) = \frac{G}{s+s_c} = \frac{G}{s+\omega_c} \quad ;$$

根据变换方法有，

$$H(z) = \frac{G}{k\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+\omega_c} = \frac{G}{k\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+2\pi f_c} \quad ;$$

$$k = \omega_c \cot\frac{\pi\omega_c}{\omega_S} = 2\pi.\cot\frac{\pi}{40} = 2\pi \times 12.706205$$ ；代入上式并简化

$$H(z) = G^{'}\frac{1+z^{-1}}{1-0.8540807z^{-1}} = G^{'}\frac{1+z^{-1}}{1-B.z^{-1}} \quad ; \qquad (20)$$

同前面的理由，取 $G^{'} = 2^{-3}$ 有 $H(1) = 0.85664$

$$H(z)=2^{-3}\frac{1+z^{-1}}{1-0.8540807z^{-1}}\quad; \tag{21}$$

$$y(n)=2^{-3}x(n)+2^{-3}x(n-1)+0.8540807y(n-1)$$

$$=2^{-3}x(n)+2^{-3}x(n-1)+[2^{0}-2^{-3}-2^{-6}].y(n-1)\quad; \tag{22}$$

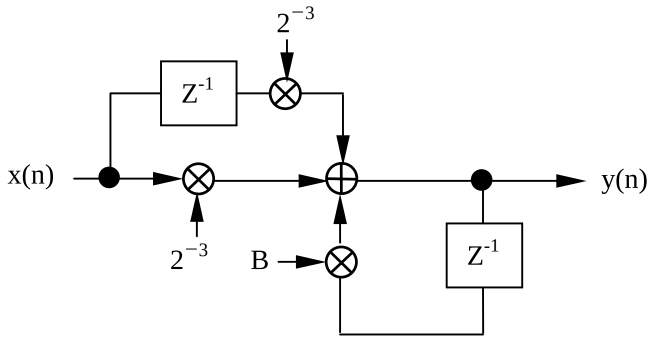

图 2，双线性变换法一阶数字滤波器

汇编程序：

地址	机器码	标号	Z80 助记符	说明
3001	16 05		LD D, 05H	拟重复 5 个周期，计数→D
3002	DD 21 40 30		LD IX, 3040H	
3006	21 40 30	LOOP：	LD HL, 3040H	建立输入数据 x(n)的地址指针
3009	06 27		LD B, 27H	输入数据的个数
300B	DD 7E 2A	FILTER：	LD A, (IX+2A)	取 y(n-1)→C
300E	4F		LD C, A	
300F	CB 39		SRL C	
3011	CB 39		SRL C	$y(n-1).2^{-3}$
3013	CB 39		SRL C	
3015	91		SUB C	$y(n-1)-y(n-1).2^{-3}$
3016	CB 39		SRL C	
3018	CB 39		SRL C	$y(n-1).2^{-3}.2^{-3}$
301A	CB 39		SRL C	
301C	91		SUB C	$y(n-1)[1-2^{-3}-2^{-3}.2^{-3}]=B.y(n-1)$
301D	4F		LDC, A	将 By(n-1)→C
301E	5E		LD E, (HL)	取 x(n-1)→E
301F	CB 3B		SRL E	
3021	CB 3B		SRL E	$x(n-1).2^{-3}$
3023	CB 3B		SRL E	
3025	23		INC HL	指向 x(n)的地址
3026	7E		LD A, (HL)	x(n)→A
3027	CB 3F		SRL A	
3029	CB 3F		SRL A	$x(n).2^{-3}$
302B	CB 3F		SRL A	

302D	83	ADDA, E	$2^{-3}x(n)+B.y(n-1)=y(n)\rightarrow A$
302E	81	ADDA, C	$y(n)\rightarrow A$
302F	DD 23	INC IX	送 y(n)
3031	DD 77 2A	LD (IX+2A), A	
3034	10 D5	DJNZ, FILTER	指向下一个采用数据
302E	15	DEC D	须计算的周期数未算完返回
302F	20 CD	JRNZ, LOOP	LOOP
3031	76	HALT	算完停机

其余的处理跟前面的例子一样，图 3 的曲线 3 是这个滤波器滤波后的结果。可以看出同是一阶滤波器，滤波效果还是有一点差别，高频显著地削弱了。

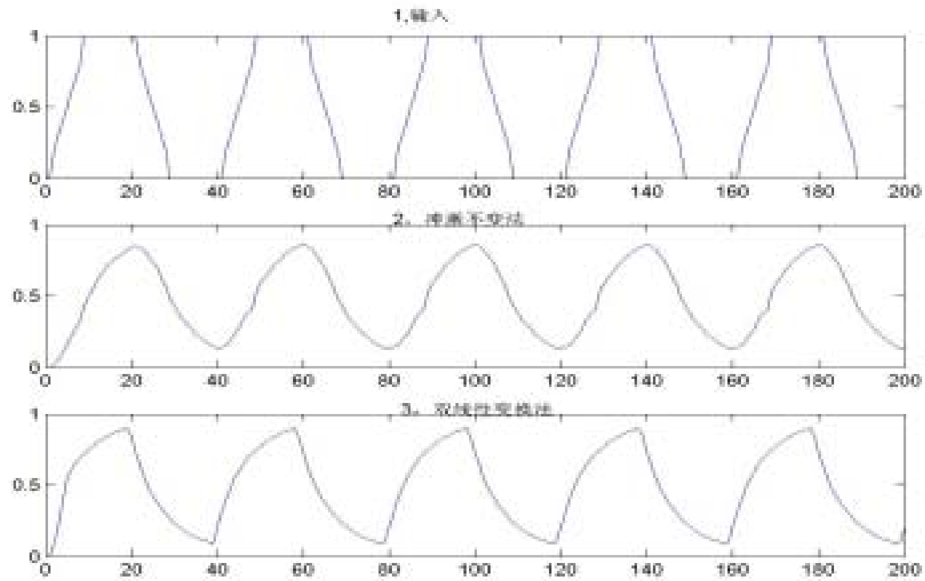

图 3，一阶数字低通滤波器输入信号及滤波输出

由于滤波器的阶次太低，滤波器效果不是那么理想是当然的，这里仅仅表示出如何真正的用模拟滤波器变换的方式设计出一个数字滤波器。

如果有 A/D，D/A 变换器的话，我们的问题还要简单，只需要很少的存储器单元就足够了，输出直接出来了，也用不着那么多计算和画图。

参考

1，“ Z80 单板机使用说明 ”

2， 邹理和 “ 数字滤波器 ” 国防工业出版社 1979 年 12 月