一种三次均匀B样条曲线快速反算的方法*

李道军[1]，邬向伟[2]
(1.郑州职业技术学院，河南 郑州 450121；2.中州大学，河南 郑州 450044)

摘 要： 提出了均匀三次B-spline曲线反算的快速算法。在Matlab中编程实现，大大降低了程序的复杂性，提高了运算效率，并使重构所得曲线的两个端点处曲率不为零，满足了一阶连续，并给出了应用实例。

关键词： 逆向工程；B-spline；反算算法；Matlab
中图分类号： TP391 **文献标识码：** A **文章编号：** 1674-7720(2011)11-0087-02

A method for inverse calculation of uniform cubic B-spline

Li Daojun[1], Wu Xiangwei[2]
(1.Zhengzhou Technical College, Zhengzhou 450121, China; 2.Zhongzhou Uiversity, Zhengzhou 450044, China)

Abstract: A rapid algorithm working out control points of uniform cubic B-spline is proposed. It is realized in Matlab, which greatly reduced the complexity of program and improved the operation efficiency. At the same time, the curvature of the two endpoints on the reconstructed curve is not zero, then first-order continuity is achieved. and some examples are described at last.

Key words: reverse engineering; B-spline; algorithm for inverse calculation; Matlab

在计算机辅助几何设计(CAGD)实践中，常遇到设计者事先并不知道控制多边形顶点的位置，而只知道曲线上的某些型值点的情况。从设计角度上来说，通常考虑的是曲线的大致形状，而非控制多边形的大致形状。为了构造B-spline曲线，就需要由已知的型值点反算出控制多边形的顶点。在实际工程应用中，B-spline曲线的反算过程所涉及到的计算量很大，因此讨论B-spline曲线的快速反算算法有着很重要的意义[1]。

对于三次均匀B-spline曲线的反算，朱心雄[2]给出了一种计算速度快且易于编程的反算控制顶点的迭代方法，可以得到在允许误差范围内的C^2连续曲线。而参考文献[3]通过A^{-1}的研究对三对角矩阵提出了一种优于追赶法和LU分解法的求解方法。但是它们都是以两端曲率为零作为边界条件，可能出现人们所不希望看到的曲线在端点处不连续的现象。针对B-spline曲线的反算过程计算量大，重构曲线端点处曲率不连续的问题，本文提出了一个有效的解决办法，并在Matlab[4]中予以编程实现，大大降低了程序的复杂性，提高了运算效率，并使重构所得曲线的两个端点处曲率不为零，至少满足了一阶连续。

* 基金项目：河南省教育厅自然基金项目(200510459060)

1 反求B-spline曲线

为了使一条k次B-spline曲线通过一组数据点q_i $(i=0,1,\cdots,m)$，反算曲线时，一般使曲线的首末端点分别与首末数据点一致，将内数据点依次作为样条曲线的分段连接点，则数据点q_i将依次与B-spline曲线定义域内的节点一一对应，即数据点q_i有节点值u_{k+i} $(i=0,1,\cdots,m)$。该B-spline插值曲线将由$n+1$个控制顶点$d_i(i=0,1,\cdots,n)$与节点矢量$\boldsymbol{U}=[u_0,u_1,\cdots,u_{n+k+1}]$来定义。其中，$n=m+k-1$，即控制顶点数目要比数据点数目多出$k-1$个，共有$m+k$个未知顶点。由端点插值要求，应取$k+1$重节点端点的固支条件，又取规范定义域。于是$u_0=u_1=\cdots u_k=0$，$u_{n+1}=u_{n+2}=\cdots u_{n+k+1}=1$。

以反算三次均匀B-spline曲线为例，曲线的定义域为$u\in[u_3,u_{n+1}]$，曲线的控制顶点应有$n=m+3$个。则B-spline曲线方程可表示为：

$$P(u_i)=\sum_{j=0}^{n}d_jN_{j,3}(u_i)=\sum_{j=i-3}^{i}d_jN_{j,3}(u_i)=q_{i-3} \tag{1}$$

$$u\in[u_i,u_{i+1}]\subset[u_3,u_{i+1}];i=3,4,\cdots,n$$

式中总共有$m+1$个线性方程组，但有$n+1$个控制顶点未知量。因此，要想得到唯一解，需要另外补充两个方程，这两个方程一般由边界条件给定。边界的补充条件

《电子技术应用》 www.ChinaAET.com

《电子技术应用》 www.ChinaAET.com

有多种形式，如给定两端点的切向量、自由端点条件、虚节点条件和抛物线条件等，实际应用中根据具体情况选取适合的边界补充条件。有了补充方程，即可用迭代法或追赶法等求解所建立的线性方程组。

2 快速反算算法

将定义在每一个节点区间上用整体参数 u 表示的 B-spline 基变换成用局部参数 $t\in[0,1]$表示，则三次均匀 B-spline 曲线段的矩阵表示为：

$$s_i(t)=[1\ \ t\ \ t^2\ \ t^3]\boldsymbol{M}_3\begin{bmatrix}d_{i-3}\\d_{i-2}\\d_{i-1}\\d_i\end{bmatrix},t\in[0,1];i=3,4,\cdots,n \qquad (2)$$

式中，$[1\ \ t\ \ t^2\ \ t^3]\boldsymbol{M}_3$ 为三次均匀 B-spline 基的矩阵表示，$\boldsymbol{M}_3$ 为三次 B-spline 基函数系数矩阵，表示为：

$$\boldsymbol{M}_3=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&4&1&0\\-3&0&3&0\\3&-6&3&0\\-1&3&-3&1\end{bmatrix}$$

对于开曲线，式(2)可改写为

$$P_i(t)=[1\ \ t\ \ t^2\ \ t^3]\boldsymbol{M}_3\begin{bmatrix}d_{i-1}\\d_i\\d_{i+1}\\d_{i+2}\end{bmatrix}(i=3,4,\cdots,n) \qquad (3)$$

由几何可知，三次均匀 B-spline 曲线在节点处，数据点与控制顶点之间有下列关系：

$$\frac{1}{6}(d_{i-1}+4d_i+d_{i+1})=P_i \qquad (4)$$

补充边界条件：由均匀 B-spline 曲线的局部性质可知，数据点的端点 P_1 与 d_0、d_1、d_2、d_3 有关，P_n 与 d_{n+1}、d_n、d_{n-1}、d_{n-2} 有关。边界条件的补充除上述选用端点曲率为零外，还有两种方法：(1) 令 d_0、d_n 位于其相邻的其他三个控制顶点所确定的抛物线上，这样能保证两个边界点的曲率不为零，但缺点是边界处卷曲过大；(2) 令 d_0、d_n 位于其相邻的其他三个控制顶点的反向延伸直线段上，但不足之处是两个边界点的曲率也为零。比较好的方法是令 d_0、d_n 分别等于与其相邻的其他三个控制顶点所确定的抛物线及反向延伸直线的平均值，即：

$$d_0=\frac{5d_1-4d_2+d_3}{2} \qquad (5)$$

$$d_{n+1}=\frac{5d_n-4d_{n-1}+d_{n-2}}{2} \qquad (6)$$

则式(4)可写为：

$$\begin{bmatrix}2&-5&4&-1&&&&0\\1&4&1&&&&&\\&1&4&1&&&&\\&&1&4&1&&&\\&&\vdots&\vdots&\vdots&&&\\&&&&1&4&1&\\&0&&&&1&4&1\\&&&&-1&4&-5&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_0\\d_1\\d_2\\d_3\\\vdots\\d_{n-1}\\d_n\\d_{n+1}\end{bmatrix}=6\begin{bmatrix}0\\P_1\\P_2\\P_3\\\vdots\\P_{n-1}\\P_n\\0\end{bmatrix} \qquad (7)$$

简化上式为：

$$\boldsymbol{AD}=\boldsymbol{P} \qquad (8)$$

那么在 Matlab 中求解式(8)线性方程组将非常简单，本文用直接法进行求解，只需输入 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{P}$，然后进行矩阵左除，即 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{A}\backslash\boldsymbol{P}$，即可输出方程组的解 $\boldsymbol{D}=[d_0\ \ d_1\ \ \cdots\ \ d_{n+1}]^{\mathrm{T}}$。需要说明的是，由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中 n 一般很大，且元素多为非零元素，故储存时易用稀疏矩阵形式。上述算法部分 Matlab 程序如下：

```
%输入数组A,数据点qi,i=1,2,…n;qx、qz 分别为其坐标;
a(1)=2;a(n+2)=2;
i=2:(n+1);
a(i)=4;
A=diag(a);
b(1)=-5;c(n+1)=-5;
i=2:(n+1);
b(i)=1;
i=1:n;
c(i)=1;
A=A+diag(b,1)+diag(c,-1);
A(1,3)=4;A(1,4)=-1;A(n+2,n)=4;A(n+2,n-1)=-1;
%输入数组P
Px(1)=0;Px(n+2)=0;
i=2:n+1;
Px(i)=6*qx(i-1);
Pz(1)=0;Pz(n+2)=0;
i=2:n+1;
Pz(i)=6*qz(i-1);
P=[Px',Pz'];
%反求控制顶点D
D=inv(A)×P;
```

求出控制顶点后，再由式(3)即可求出参数定义域内任意节点上的数据点值，从而也就求出了所需曲线。

利用上述算法对图 1 所示经过预处理后的数据点进行运算，图 2 所示为反求的控制顶点，图 3 为上述算法重构的曲线。上述均匀三次 B-spline 曲线反求算法，可扩展到均匀双三次 B-spline 曲面控制网格顶点的反算。

图 1 精简后数据点

图 2 反求的控制顶点

图 3 数据点以及插值曲线

参考文献

[1] 刘德平.逆向工程关键技术及其应用研究[D].西安：西安电子科技大学，2008.

[2] 朱心雄.自由曲线曲面造型技术[M].北京：科学出版社，1999.

[3] 吴光亚，王小华.反求三次 B 样条曲线控制顶点的一种快速算法[J].杭州电子科技大学学报，2005，25(3)：64-66.

[4] 王学辉，张明辉.Matlab 6.1 最新应用详解[M].北京：中国水利水电出版社，2002.

(收稿日期：2010-12-15)

作者简介：

李道军，1981，教师，助教，工学硕士，主要研究方向：机电一体化技术、智能化 CAD/CAM。

《电子技术应用》 www.ChinaAET.com