

# 一种新的用于图像边缘检测的滤波器设计

王玉茜

(江南机电设计研究所, 贵州 贵阳 550006)

**摘要:** 在分数阶微分 Günwald-Letnikov 定义的基础上, 设计了一种中心对称分数阶差分滤波器。同时考察了其对一维信号的滤波特性, 进而给出了一种具有两个参数的用于图像边缘检测的滤波算子, 并通过实验归纳了该滤波算子两个参数的作用。实验表明, 在处理不含噪图像时, 该方法能很好地提取图像边缘信息, 其效果不亚于经典的边缘提取方法; 对于含噪图像, 由于具有两个可调的参数, 此滤波器更为灵活, 能够获得比其他一些经典方法更优的效果。

**关键词:** 分数阶微分; 中心对称; 边缘检测; 频幅特性

中图分类号: TP391.41

文献标识码: A

文章编号: 1674-7720(2011)09-0046-04

## A new filter design for image edge extraction

Wang Yuqian

(Jiangnan Design & Research Institute of Electric & Machinery, Guiyang 550006, China)

**Abstract:** In this paper, based on Günwald-Letnikov fractional differential formula, a new filter with two parameters is designed for edge detection, which is called centre-symmetric fractional differential filter. First, analyze its amplitude-frequency characteristics and then introduce the functions of two variables by experiments on 2D images. At last, some conclusions are arrived at. In processing the images without noise, the method proposed performs as well as other classical edge extraction methods. Especially, it surpasses others when processing image with noise because of its flexible parameters.

**Key words:** fractional differential; centre-symmetric; edge detection; amplitude-frequency

分数阶微分理论(或称非整数阶微分), 从建立至今已经有 300 多年的历史。近几十年来, 分数阶微分在不同的自然科学领域(如机械、电子、化学、生物、经济、控制理论以及自动化等学科<sup>[1-2]</sup>领域)开始发挥其重要的作用, 分形图像压缩等课题也开始引进分数阶理论。近几年, 国内一些学者尝试将该理论引入图像处理领域<sup>[3-5]</sup>。

在图像处理领域, 边缘检测通常利用整数阶微分算子, 常见的有: 基于一阶微分算子的 Sobel 算子、Prewitt 算子和基于二阶微分算子的 Laplacian 算子。分数阶微分算子可以看作是整数阶的推广, 有学者对基于分数阶微分的图像边缘提取做了一定研究<sup>[4-5]</sup>, 但都是基于工程上最广泛应用的 Günwald-Letnikov 分数阶微分的原始定义, 并未做较大变动, 而且该定义下的分数阶微分对非零常信号的响应并不为零, 这对信号突变部分检测会造成不利影响。本文在之前一些学者的研究基础上, 设计

了一种新的用于提取图像边缘的滤波器, 并通过实验总结了该滤波器两个参数的作用, 证明了该方法在图像边缘信号提取方面的优越性。

### 1 一维中心对称分数阶微分滤波器

#### 1.1 结构

由分数阶微分的 G-L 定义式<sup>[6]</sup>可知, 连续信号在某点的分数阶微分是整数阶向后差分的推广, 本质上是单方向的差分和。同时, 由于各项的系数之和不为零, 导致了非零常信号的分数阶微分不为零, 这对检测边缘等突变信号会产生不利影响。因为对于图像边缘检测来说, 所要求的滤波器应在灰度突变部分有极大响应, 其他平稳部分有极小或者无响应。如果要满足平稳信号的分数阶微分为零这个条件, 必须构造一个对称算子, 使得各项的系数和为零。从这一思想出发, 本文设计了一种新的能够满足要求的分数阶微分算子。

假设函数  $f(t)$  为一维光滑信号, 其一阶中心差分公式为:

$$\delta f(t) = f(t + \frac{h}{2}) - f(t - \frac{h}{2}) \stackrel{\Delta}{=} E^{\frac{1}{2}}(f(t)) - E^{-\frac{1}{2}}(f(t)) = (E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}})f(t)$$

其中,  $h$  为步长(下同);  $t$  为自变量。因而,  $f(t)$  的一阶导可记为:

$$D'f(t) = \frac{1}{h}(E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}})f(t) + O(h^2)$$

相比向前或向后差分公式的精度  $O(h)$ , 中心差分的精度得到了提高。将上式舍去高阶项, 得:

$$D'f(t) = \frac{1}{h}(E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}})f(t)$$

根据参考文献[7]中的思想, 随着  $t$  的增加和减少分别可得两种微分表达式:

$$D_{\rightarrow}^{\alpha}f(t) = \frac{1}{h}(E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}})f(t)$$

$$D_{\leftarrow}^{\alpha}f(t) = \frac{1}{h}(E^{-\frac{1}{2}} - E^{\frac{1}{2}})f(t)$$

从而, 可得中心对称的分数阶微分算子:

$$D^{\alpha}f(t) = D_{\rightarrow}^{\alpha}f(t) - D_{\leftarrow}^{\alpha}f(t) = \frac{1}{h^{\alpha}}[(E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}})^{\alpha} - (E^{-\frac{1}{2}} - E^{\frac{1}{2}})^{\alpha}]f(t) =$$

$$\frac{1}{h^{\alpha}} \left[ \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{j} (E^{\frac{j}{2}} - E^{-\frac{j}{2}}) \right] f(t) =$$

$$\frac{1}{h^{\alpha}} \left[ \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{j} \left( f(t+jh - \frac{\alpha}{2}h) - f(t-jh + \frac{\alpha}{2}h) \right) \right]$$

其中,  $\alpha$  为阶次,  $\alpha \in R^+$ ;  $D^{\alpha}f(t)$  表示信号  $f(t)$  的  $\alpha$  阶微分(下同);  $\binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-j+1)}{j!}$ , 下同。

在对信号求近似分数阶微分时可进行线性插值, 令:

$$f(t+jh - \frac{\alpha}{2}h) = (1 - \frac{\alpha}{2})f(t+jh) + \frac{\alpha}{2}f(t+(j-1)h)$$

$$f(t-jh + \frac{\alpha}{2}h) = (1 - \frac{\alpha}{2})f(t-jh) + \frac{\alpha}{2}f(t-(j-1)h)$$

从而得:

$$D^{\alpha}f(t) = \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{j=1}^{\infty} ((-1)^j \binom{\alpha}{j} (f(t+jh) - f(t-jh)))$$

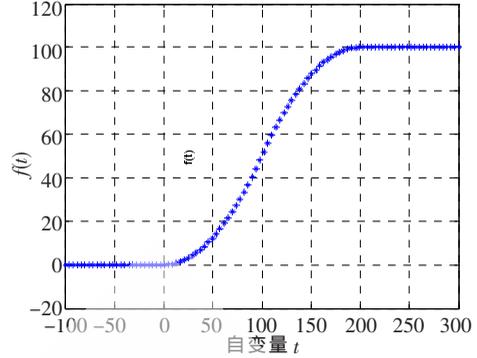
根据上式, 可直接得出一元信号  $f(t)$  ( $t \in [a, b]$ ) 的中心对称分数阶差分表达式为:

$$D^{\alpha}f(t) \approx \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{j=1}^{\lfloor (b-a)/h \rfloor} ((-1)^j \binom{\alpha}{j} (f(t+jh) - f(t-jh))) \quad (1)$$

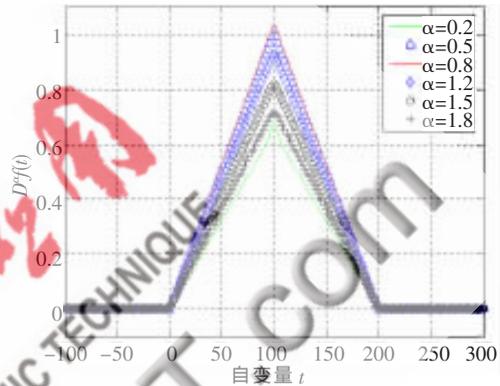
设一维图像边缘模拟信号 (可看成图像灰度变化剖面图) 的数学表达式为:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{200}t^2 & 0 \leq t < 100 \\ -\frac{1}{200}t^2 + 2t - 100 & 100 \leq t < 200 \\ 100 & t > 200 \end{cases}$$

该信号的图形及其中心对称分数阶差分结果如图 1 所示。



(a) 一维图像边缘模拟信号



(b) 阶次在 0~2 的中心对称分数阶微分曲线

图 1 一维图像边缘模拟信号及中心对称分数阶微分曲线

由图 1 可知, 中心对称分数阶差分算子对信号作用后, 在信号的平稳段响应几乎为零, 在  $[0, 200]$  段信号发生变化的区间内有显著响应, 同时在拐点处响应达到最大。

### 1.2 频幅特性

为考察中心对称分数阶微分的滤波原理, 本设计通过变换域的方法考察其对信号的作用。信号的中心对称分数阶微分的 Fourier 变换为:

$$\begin{aligned} F[D^{\alpha}f(t); \omega] &= \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{j=1}^{\infty} [(-1)^j \binom{\alpha}{j} (e^{ijh\omega} - e^{-ijh\omega})] \cdot F(\omega) = \\ &= \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{j=1}^{\infty} [(-1)^j \binom{\alpha}{j} \cdot 2i \sin(jh\omega)] \cdot F(\omega) = \\ &= i \cdot \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{j=1}^{\infty} ((-1)^j \binom{\alpha}{j}) \cdot 2 \sin(jh\omega) \cdot F(\omega) \end{aligned}$$

式中,  $F(\omega)$  为信号  $f(t)$  的 Fourier 变换;  $F[D^{\alpha}f(t); \omega]$  为分数阶微分  $D^{\alpha}f(t)$  的 Fourier 变换;  $\omega$  为归一化频率;  $i$  为复数的虚部单位,  $i^2 = -1$ , 下同。

所以, 对于离散有限长信号, 其频率滤波函数为:

$$H(\omega) = i \cdot \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{j=1}^{\infty} ((-1)^j \binom{\alpha}{j}) \cdot 2 \sin(jh\omega) \quad (2)$$

根据式(2)画出不同阶次分数阶微分的频幅特性曲线如图 2 所示。从图 2 可知, 中心对称分数阶微分滤波器本质上是一个带通滤波器。阶次在  $0 \sim 1$  之间的滤波器具有抑低通高的作用, 而随着阶次的提高, 曲线的极值

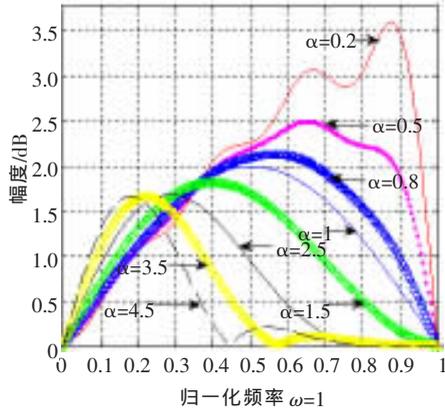


图2 中心对称分数阶微分滤波器的幅频曲线

点向低频处偏移,对高频部分的抑制作用增强,具有通低频的功能。但是,从空间响应来看(图1(b)),与平稳信号的零响应相比,其对信号的突变部分仍然有极大响应。因此,对于近似抛物线型的变化了的信号,中心对称分数阶微分算子仍可以有效地检测到其边缘部分。同时,由于高阶次的中心对称分数阶微分算子具有阻高频的作用,而噪声属于高频成分,因而从理论上分析可知,适当阶次的微分算子对噪声有一定的抑制作用。

## 2 数字图像中心对称分数阶差分滤波器的构造

在第1节中,主要分析了中心对称分数阶微分算子对一维信号的空间响应和幅频特性,并得到了一些结论。本节将其拓展到二维空间并应用于图像边缘检测。对于一幅大小为  $M \times N$  二维图像  $f(x, y)$ ,每个点处的分数阶微分可看作是分别沿  $x$  和  $y$  方向上的分数阶偏微分,而且不可能取到精确值,所以应用如下分数阶差分来逼近:

$$\frac{\partial^\alpha f(x, y)}{\partial x^\alpha} \approx \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=1}^{\lfloor (x-x)/h \rfloor} ((-1)^j \binom{\alpha}{j}) (f(x+jh, y) - f(x-jh, y)) \quad (3)$$

$$\frac{\partial^\alpha f(x, y)}{\partial y^\alpha} \approx \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=1}^{\lfloor (y-y)/h \rfloor} ((-1)^j \binom{\alpha}{j}) (f(x, y+jh) - f(x, y-jh))$$

由于图像尺寸的限制,点  $(x, y)$  处的差分尺寸  $2n+1$  最大为图像本身的尺度  $\min\{M, N\}$ ,且由于像素是离散值,因此最小间隔  $h$  为1。所以式(3)可变为:

$$\frac{\partial^\alpha f(x, y)}{\partial x^\alpha} \approx \sum_{j=1}^N (-1)^j \binom{\alpha}{j} (f(x+j, y) - f(x-j, y)) \quad (4)$$

$$\frac{\partial^\alpha f(x, y)}{\partial y^\alpha} \approx \sum_{j=1}^N (-1)^j \binom{\alpha}{j} (f(x, y+j) - f(x, y-j))$$

根据此定义,构造垂直、水平、左对角线、右对角线4个方向的差分模板,如图3所示。

图中,  $a_1 = -\alpha, a_2 = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}, a_n = (-1)^n \binom{\alpha}{n} = (-1)^n$

$$\frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} (n=2, 3, K).$$

掩模1和掩模2是计算  $x$  轴方向和  $y$  轴方向上的像素的中心对称分数阶差分。为了增强图像的抗旋转



图3 4个中心对称分数阶差分掩模

性,添加了掩模3和掩模4。灰度图像的中心对称分数阶差分滤波的运算步骤如下:

- (1) 分别将4个掩模的中心点位置(掩模尺寸为  $2n+1$ )对应到图像上的待滤波的像素点  $(x, y)$  处。
- (2) 将掩模上的系数值分别与对应点处的图像像素灰度值相乘,相加得到的结果即为该中心点像素的响应。
- (3) 4个掩模都对待处理的像素点进行步骤(2)作用后,可得到4个响应值,取其绝对值最大的作为待滤波像素点的最终响应值。

(4) 为显示滤波后的图像,对图像的所有像素点都进行(1)~(3)步处理,然后进行灰度拉伸,使得像素值在  $0 \sim 255$  之间。

在逐一进行像素平移时,为了不使掩模的行或列超出待处理的数字图像平面,必须使掩模的中心点距图像边缘像素的距离不小于  $n$ 。在处理彩色图像时,可先转成灰度图像后再处理。这样构造的滤波器具有阶次( $\alpha$ )和尺寸  $(2n+1)$  两个可调参数。

## 3 实验仿真及结果分析

实验一:本实验中滤波器两个参数分别为  $\alpha=0.8, n=2$ ,从实验结果可知,本文提出方法能够很好地提取图像边缘信息,包括细小的边缘都能检测到。对灰度图像和彩色图像的边缘检测效果如图4所示。



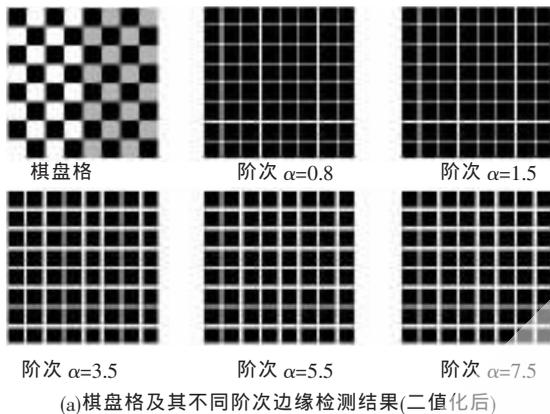
(a)原始细胞图 (b)边缘检测图 (c)原始彩色图像 (d)边缘检测图

图4 对灰度图像和彩色图像的边缘检测效果

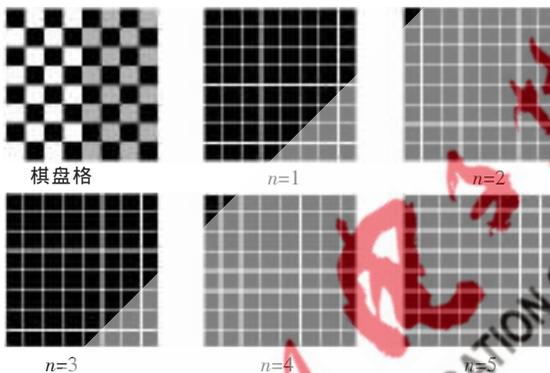
实验二:考察在处理不含噪声图像时滤波器两个参数的作用,以对棋盘格图像进行处理为例,首先给出如图5(a)所示的不同阶次滤波效果图。

实验中采用的滤波尺寸  $n$  固定为5。由实验结果图

5(a)可知,阶次越大,边缘轮廓线越粗,且变得模糊,这说明较低阶次的中心对称微分滤波器对边缘这样的高频信息的响应更为明显。根据多次实验可得:在处理不含噪图像时,比较合适的阶次应取在 0.5~0.9 之间。掩模尺寸越大,则整幅图像四周末处理的像素就越多,但是随掩模尺寸变大,滤波后图像中边缘粗细变化不明显。如图 5(b)所示。



(a) 棋盘格及其不同阶次边缘检测结果(二值化后)



(b) 棋盘格及其不同尺寸边缘检测结果(二值化后)

图 5 处理不含噪图像时滤波器两个参数的作用

实验三:考察对于含噪图像中心对称微分滤波器的两个参数的作用。首先固定尺寸  $n$  为 7,对棋盘格图像加入均值为 0、方差为 0.05 的高斯噪声。

从图 6 可以看出,对于受到噪声污染比较严重的图像,随着阶次的增大,滤波器对噪声的免疫力增强,图像内部图形的边缘更加清晰。低阶次滤波后的图像边缘比较细,对噪声的响应也较大,而高阶次的边缘越来越粗,同时对噪声的响应也较弱。由图可知,4.1 阶次的滤波效果最好。验证了随着阶次的提高,中心对称分数阶微分算子通低频阻高频的作用增强。

图 7 显示了模板的尺寸在抗噪过程中的作用。取定阶次为 4.1,随着掩模尺寸变大,对噪声的敏感度逐渐降低,即抗噪能力逐渐增强。

经实验可知,通过调整掩模的两个参数( $\alpha$ )和( $2n+1$ ),可以灵活地调整对含噪图像的处理效果。事实上,边缘提取和降噪是一对矛盾体,因此,采用中心对称分数阶差分滤波算子时,阶次的选择必须采用折中的办法。

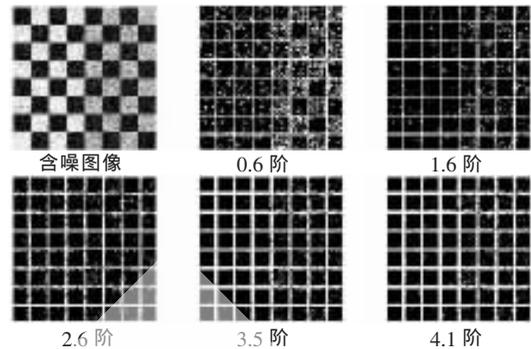


图 6 受噪声污染严重的图像及其不同阶次滤波器滤波结果

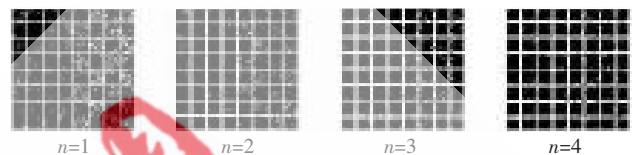


图 7 阶次固定而尺寸不同的滤波器对图像的处理结果(二值化后)

因为低阶次对边缘响应大,同时对噪声的响应也大。而高阶次对噪声响应较小,但对边缘的检测也相对模糊。经过试验分析,本设计选择阶次  $\alpha$  在 3.5~5.5 之间。掩模尺寸过大时,图像四周有过多的边缘像素无法处理,因此,考虑到降噪和图像处理的全面性,尺寸  $n$  选择在 7~9 之间。

实验四:实验中选择的滤波算子包括参考文献[4]中构造的用于边缘提取的分数阶掩模 Tiansi 算子以及常用的一些整数阶边缘检测算子、基于最优理论的 Canny 算子。为更清晰比较各个掩模算子对含噪信号边缘检测的效果,特别对滤波后的图像做二值化处理。各种滤波算子在处理含噪图像时的效果如图 8 所示。

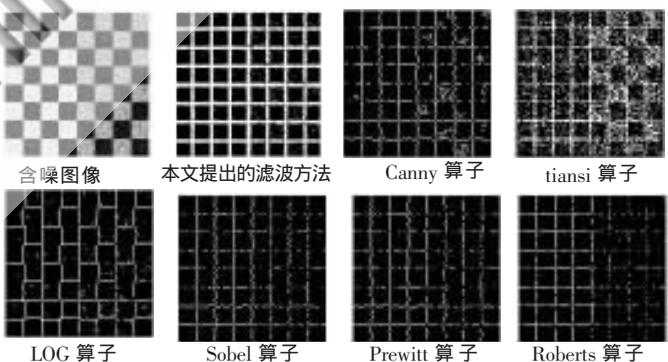


图 8 不同滤波算子对含噪图像的滤波结果

由图 8 可知,对含有较高噪声的图像,相对于常用的一阶和二阶边缘检测算子,适当阶次和尺寸的中心对称差分算子对含较高噪声图像的边缘的响应比较明显,边缘比较清晰。而经典的二阶微分 LOG (Laplacian Of Gaussian)算子处理过的图像已经难以看清边缘,其他的一阶算子处理后的边缘不连续。由分数阶思想构造的 Tiansi 算子处理过的图像虽然也能看出内部图形的大致轮廓,但是对噪声的响应比较大。Canny 算子虽然理论

上是将抗噪和边缘提取进行最优结合的一种方法,但是从实验结果来看,与本文提出的方法还有较大的差距。

本文提出的针对图像边缘提取的中心对称分数阶微分滤波模板在处理图像时,比传统整数阶微分滤波器具有更优越的性能,这种有两个可调参数的基于分数阶思想的滤波器有较高的抗噪性和鲁棒性,更适合于图像处理。本文对二维中心对称分数阶差分滤波器的两个参数的作用作了初步的讨论,但如何自适应地选择更合适的参数还需进一步研究。同时,将分数阶的思想引入信号处理领域也是一个值得继续研究的方向。

#### 参考文献

- [1] 蒲亦非.分数阶微积分在现代信号分析与处理中应用的研究[D].成都:四川大学,2006.
- [2] 薛定宇,陈阳泉.控制数学问题的 MATLAB 求解[M].北京:清华大学出版社,2007.

- [3] 杨柱中,周激流,晏祥玉,等.基于分数阶微分的图像增强[J].计算机辅助设计与图形学报,2008,20(7):343-348.
- [4] 杨柱中,周激流,黄梅,等.用分数阶微分提取图像边缘[J].计算机工程与应用,2007,43(35):15-18.
- [5] 张旭秀,卢洋.基于分数阶微分的医学图像边缘检测方法[J].大连交通大学学报,2009,30(6):61-65.
- [6] PODLUBNY I. Fractional differential equations [M]. San Diago: Academic Press, 1999.
- [7] MATHEU B, MELCHIOR P, A OUSTALOUP C H, et al. Fractional differentiation for edge detection [J]. Signal Processing, 2003,83:2421-2432.

(收稿日期:2010-12-04)

#### 作者简介:

王玉茜,女,1987年生,助理工程师,主要研究方向:软件开发与测试。

电子技术应用  
APPLICATION OF ELECTRONIC TECHNIQUE  
www.chinaAET.com