概率逻辑结果支持度的合成算法

曾子林
(南昌陆军学院,江西 南昌 330103)

摘 要: Haenni 的概率推理系统在与 D-S 理论相互转化的过程中进行了投影,从而不可避免地导致一些有价值信息的丢失。为此提出一种新的概率逻辑结果支持度的合成算法来避免信息的丢失。

关键词: 概率推理系统;D-S 理论;合成算法
中图分类号: TP18 **文献标识码:** A **文章编号:** 1674-7720(2011)07-0087-04

Combination algorithm of the degree of support about probabilistic entailment

Zeng Zilin
(Nanchang Military Academy, Nanchang 330103, China)

Abstract: The projection, which is used to translate Haenni's probabilitic argumentation systems into Dempester-Shafer theory, inevitably caused the loss of some valuable information. To overcome this defect, this paper brings forth combination algorithm of the degree of support about probabilistic entailment to avoid the loss of information.

Key words: probabilitic argumentation systems; Dempester-Shafer theory; combination algorithm

概率推理系统的目的是根据不确定知识来判断一个未知问题,与不确定性推理中的其他理论相比,该理论既支持定量判断,也支持定性计算。它将古典逻辑和概率理论完美结合,使得在不脱离古典逻辑的领域内也能通过自然、简捷的方法得到非单调性,同时还可以利用古典逻辑的丰富计算手段进行数值计算。另一方面,概率理论是贝叶斯方法的基础,它能得到不确定性推理的更为一般的方法,概率理论的使用结果能使该理论与 D-S 理论进行相互转化[1-2]。概率推理系统中的计算主要是通过消除变量或命题而得到最小拟支持,这种方法的优点是对不同的公式体系[3]都适用。但在与 D-S 理论相互转化的过程中进行了投影,从而不可避免地导致丢失有价值的信息。为了克服这个缺陷,本文采取将一个大的概率推理系统划分为几个小的概率推理系统,从而得到不同的势,再将这些势扩充到同一空间合成的方法来避免信息的丢失。

1 D-S 理论

D-S 理论早期的基础是信任函数 bel_φ,φ 是给出的证据。M_φ、pl_φ 分别代表 φ 的 mass 函数和似真度函数。文中用 $[\varphi]_m$、$[\varphi]_b$、$[\varphi]_p$ 分别代替 M_φ、bel_φ、pl_φ。

定义 1 mass 函数 $[\varphi]_m: 2^{\Theta_D}\to[0,1]$,对每个集 $X\subseteq\Theta_D$ 在 $[0,1]$ 有相应的值对应,使得 $\sum_{X\subseteq\Theta_D}[\varphi(X)]_m=1$,mass 函数称为基本概率分配。

定义 2 信任函数 $[\varphi]_b: 2^{\Theta_D}\to[0,1]$, $[\varphi(H)]_b=\sum_{X\subseteq H}[\varphi(X)]_m=\sum_{\substack{X\subseteq H\\ X\in FS(\varphi)}}[\varphi(X)]_m$。

定义 3 似真度函数 $[\varphi]_p: 2^{\Theta_D}\to[0,1]$, $[\varphi(H)]_p=\sum_{X\cap H\neq\phi}[\varphi(X)]_m=\sum_{\substack{X\cap H\neq\phi\\ X\subseteq FS(\varphi)}}[\varphi(X)]_m$。

定义 4 正规化:把 C_φ 按一定比例分配到非空焦元集 $FS(\varphi)\backslash\{\phi\}$ 上,分别定义为:

$$[\varphi(X)]_M=\begin{cases}0, & X=\phi\\ \dfrac{[\varphi(X)]_m}{1-C_\varphi}, & 其他\end{cases}$$

$$[\varphi(H)]_B=\sum_{X\subseteq H}[\varphi(X)]_M=\sum_{\substack{X\subseteq H\\ X\in FS(\varphi)}}[\varphi(X)]_M=\frac{[\varphi(H)]_b-C_\varphi}{1-C\varphi}$$

$$[\varphi(H)]_P=\sum_{X\cap H\neq\phi}[\varphi(X)]_M=\sum_{\substack{X\cap H\neq\phi\\ X\in FS(\varphi)}}[\varphi(X)]_M=\frac{[\varphi(H)]_P}{1-C_\varphi}$$

定义 5 合成： 设 $\varphi_1\in\Phi_{D_1}$，$\varphi_2\in\Phi_{D_2}$ 产生一个新位势 $\varphi_1\otimes\varphi_2$，$[\varphi_1\otimes\varphi_2(X)]_m=\sum_{X_1^{\uparrow D}\cap X_2^{\uparrow D}=X}[\varphi_1(X)]_m[\varphi_2(X)]_m=\sum_{\substack{X_1^{\uparrow D}\cap X_2^{\uparrow D}=X\\ X_1\in FS(\varphi_1),X_2\in FS(\varphi_2)}}[\varphi_1(X_1)]_m[\varphi_2(X_2)]_m$，$X_1^{\uparrow D}$、$X_2^{\uparrow D}$ 分别代表集 $X_1\subseteq\Theta_{D_1}$ 和 $X_2\subseteq\Theta_{D_2}$ 在新范围 D 上的空扩张。

定义 6 边际： φ 在 D 上产生一个新的定义在 $D'\subseteq D$ 上的位势 $\varphi^{\downarrow D'}$，$[\varphi^{\downarrow D'}(X)]_m=\sum_{Y^{\downarrow D'}=X}[\varphi(Y)]_m=\sum_{\substack{Y^{\downarrow D'}=X\\ Y\in FS(\varphi)}}[\varphi(Y)]_m$，式中 $Y^{\downarrow D'}$ 是集 $Y\subseteq\Theta_D$ 到新范围 D' 的投影。

2 概率推理系统

为了建立概率推理系统，考虑两个不相交的命题集 $A=\{a_1,\cdots,a_m\}$ 和 $P=\{p_1,\cdots,p_m\}$，其中 A 中的元素称为假设，它表示不确定信息，代表不确定事件。$N_A=\{0,1\}$[4] 用来代表关于 A 所有可能结构的解释集。若 $s\in N_A$，则 s 称为指派。$L_{A\cup P}$ 记为关于 $A\cup P$ 上的命题全体，命题 $h\in L_{A\cup P}$ 表示 $A\cup P$ 上的一个不确定性的命题。命题 ξ 称为知识基，它一般由一个子句命题集 $\sum=\{\xi_1,\cdots,\xi_r\}$ 给出，即 $\xi=\xi_1\wedge\xi_2\wedge\cdots\wedge\xi_r$，$d_A(\xi)$ 表示命题 ξ 中包含在 A 中元素组成的集合。仅仅包含假设命题的项有着特别的意义，它代表未知的状态，每个项 $\tau\in C_A$ 都有相应的模型集 $N_A(\tau)\subseteq N_A$ 与之对应。相反地，每个指派集 $s\in N_A$ 也有相应的项 $\tau(s)\in C_A$ 使得 $N_A(\tau(s))=\{s\}$，记 $\xi_{\leftarrow s}=\tau(s)\wedge\xi$。

定义 7[4]：设 $A=\{a_1,\cdots,a_m\}$ 和 $P=\{p_1,\cdots,p_m\}$ 是两个不相交的命题集，若 ξ 是 $L_{A\cup P}$ 中的命题，每个假设 $a_i\in A$ 有相应的先验概率 $\pi_i=p(a_i)(i=1,2,\cdots,n)$，记 $\prod=\{\pi_1,\cdots,\pi_n\}$ 为所有先验概率的集合，则四元变量 $(\xi,P,A,\prod)$ 构成一个概率推理系统。

ξ 称为系统的知识基，知识基 ξ 通常被认为是可满足的，且以合取集合 $\sum=\{\xi_1,\cdots,\xi_r\}$ 的形式给出，其中 $\xi_i\in D_{A\cup P}$，$D_{A\cup P}$ 记为 $A\cup P$ 上的子句集。$\xi=\xi_1\wedge\xi_2\wedge\cdots\wedge\xi_r$，若 $\xi\equiv\top$，ξ 是空知识基；若 $\xi\equiv\perp$，则 ξ 是矛盾的。

定义 8[4]：令 ξ 是 $L_{A\cup P}$ 中的一个命题，$s\in N_A$ 是关于 ξ 的不一致指派，为 $s|=_\xi\perp$；否则 s 是关于 ξ 的一致指派，也即 $S^{\uparrow A\cup P}$ 中至少有一个指派使 ξ 为真。

关于 ξ 的所有不一致指派集记为 $I_A(\xi)=\{s\in N_A:s|=_\xi\perp\}$；

关于 ξ 的所有一致指派集记为 $C_A(\xi)=\{s\in N_A:s|\neq_\xi\perp\}$。

定义 9[4]：令 h 和 ξ 是 $L_{A\cup P}$ 中的两个命题

(1)关于 ξ 的 h 拟支持指派集，记为 $QS_A(h,\xi)=\{s\in N_A:s|=_\xi h\}$。

(2)关于 ξ 的 h 支持指派集，记为 $SP_A(h,\xi)=\{s\in N_A:s|=_\xi h$ 且 $s|\neq_\xi\perp\}$。

(3) 关于 ξ 的 h 可能支持指派集，记为 $PS_A(h,\xi)=\{s\in N_A:s|\neq_\xi\neg h\}$。

(4)关于 ξ 的 h 驳斥指派集，记为 $RF_A(h,\xi)=\{s\in N_A:s|\neq_\xi\neg h$ 且 $s|\neq_\xi\perp\}$。

定义 10：h 的拟支持度：$dqs(h,\xi)=p(s\in QS_A(h,\xi))$

h 的支持度：$dsp(h,\xi)=p(s\in SP_A(h,\xi)|s\notin I_A(\xi))$。

h 的可能度：$dps(h,\xi)=p(s\notin RF_A(h,\xi)|s\notin I_A(\xi))$。

定理 1 $(\xi,A,P,\prod)$ 是一个概率推理系统，如果一个信任势 $\varphi\in\Phi_Q$ 被定义为：$[\varphi(X)]_m=\sum_{X=N_Q(\xi\leftarrow s)}p(\hat{s}=s)$，那么 $dps(h,\xi)=[\varphi(H)]_b$，式中 $h\in L_{A\cup P}$，$H=N_Q(h)$，$Q=d_{A\cup P}(h)$。

定理 2 $(\xi,A,P,\prod)$ 是一个概率推理系统，如果 $\varphi\in\Phi_Q$，$Q\subseteq A\cup P$ 且 $dps(h,\xi)=[\varphi(H)]_b$，式中 $h\in L_Q$，$H=N_Q(h)$，那么：

(1)$dps(h,\xi)=[\varphi(H)]_B$ (2)$dps(h,\xi)=[\varphi(H)]_P$

例 1 设有两台计算机 x_1、x_2，以两条线路 a 或 b 连接，x_1 可通过 a 或 b 传达信息给 x_2，如图 1 所示。若线路 a 正常的概率为 $p(a)=0.8$，线路 b 正常的概率为 $p(b)=0.5$，求 x_1 将信息传达到 x_2 的支持度。

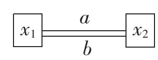

图 1 两台计算机相连

首先构造概率推理系统 $A=\{a,b\}$，$P=\{x_1,x_2\}$，指派 $s_1=(1,1)$，$s_2=(0,1)$，$s_3=(1,0)$，$s_4=(0,0)$，$\sum=\{\neg x_1\vee\neg a\vee x_2,\neg x_1\vee\neg b\vee x_2\}$，要求 $dsp(x_1\to x_2,\xi)$。

由于 $\xi_{\leftarrow s_1}=a\wedge b\wedge(\neg x_1\vee x_2)$ $p(s_1)=0.8\times0.5=0.4$

$\xi_{\leftarrow s_2}=\neg a\wedge b\wedge(\neg x_1\vee x_2)$ $p(s_2)=0.2\times0.5=0.1$

$\xi_{\leftarrow s_3}=a\wedge\neg b\wedge(\neg x_1\vee x_2)$ $p(s_3)=0.8\times0.5=0.4$

$\xi_{\leftarrow s_4}=\neg a\wedge\neg b$ $p(s_4)=0.2\times0.5=0.1$

令 $h=x_1\to x_2$，式中 $Q=\{x_1,x_2\}$，$H=N_Q(h)=\{(1,1),(0,1),(0,0)\}$

得到焦元 $F_1=\{(1,1),(0,0),(0,1)\}$；$F_2=\{(1,1),(0,1),(1,0),(0,0)\}$；$[\varphi(F_1)]_m=p(s_1)+p(s_2)+p(s_3)=0.9$；$[\varphi(F_2)]_m=p(s_4)=0.1$；

所以 $dps(x_1\to x_2,\xi)=[\varphi(F_1)]_m=0.9$。

例 2 将上例中的两台计算机改为三台计算机相连，其他条件不变，如图 2 所示。

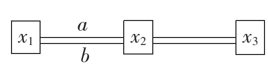

图 2 三台计算机相连

构造概率推理系统 $A=\{a,b\}$，$P=\{x_1,x_2,x_3\}$，指派 $s_1=(1,1)$，$s_2=(0,1)$，$s_3=(1,0)$，$s_4=(0,0)$。知识基 $\xi=\xi_1\wedge\xi_2\wedge\xi_3\wedge\xi_4$，其中 $\xi_1=x_1\wedge a\to x_2$，$\xi_2=x_1\wedge b\to x_2$，$\xi_3=x_2\wedge a\to x_3$，$\xi_4=x_2\wedge b\to x_3$，要求 $dsp(x_1\to x_3,\xi)$。

ξ 可转化为子句集 $\sum=\{\neg x_1\vee\neg a\vee x_2,\ \neg x_1\vee\neg b\vee x_2,\neg x_2\vee\neg a\vee x_3,\neg x_2\vee\neg b\vee x_3\}$

$\xi_{\leftarrow s_1}=a\wedge b\wedge(\neg x_1\vee x_2)\wedge(\neg x_2\vee x_3)$

$\xi_{\leftarrow s_2}=\neg a\wedge b\wedge(\neg x_1\vee x_2)\wedge(\neg x_2\vee x_3)$

$\xi_{\leftarrow s_3}=a\wedge\neg b\wedge(\neg x_1\vee x_2)\wedge(\neg x_2\vee x_3)$

$\xi_{\leftarrow s_4}=\neg a\wedge\neg b$

$p(s_1)=0.4\quad p(s_2)=0.1\quad p(s_3)=0.4\quad p(s_4)=0.1$

令 $h=x_1\to x_3$，则 $Q=\{x_1,x_3\}$，$H=N_Q(h)=\{(1,1),(0,1),(0,0)\}$

焦元集 $FS(\varphi)=\{F_1,F_2\}$

$F_1=\{(1,1),(0,1),(0,0)\}$

$F_2=\{(1,1),(1,0),(0,1),(0,0)\}$

$[\varphi(F_1)]_m=p(s_1)+p(s_2)+p(s_3)=0.9\quad [\varphi(F_2)]_m=p(s_4)=0.1$

故 $dsp(x_1\to x_3,\xi)=0.9$。

从上面两个例子可以看出 $x_1\to x_3$ 与 $x_1\to x_2$ 的支持度都是相同的，如果四台计算机相联同样可以算出 $x_1\to x_4$ 的支持度也是 0.9，这显然有违常理。造成这种状况发生的原因是由于定理 1 中构造的信任势使得 $dps(h,\xi)=[\varphi^{\downarrow Q}(H)]_b=\sum_{X^{\downarrow Q}\subseteq H}[\varphi(X)]_m$，在投影的过程中容易造成一些信息的丢失。特别是 ξ 中的信息越多，越容易丢失，为了防止信息丢失，引进了一种新的方法，即将 ξ 中的信息进行逐步分解。

3 弱相关条件下的分解及概率逻辑结果支持度的合成计算

本方法的思想是将较大的概率推理系统划分为几个小的概率推理系统，设各个小概率推理系统所对应的势分别为 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_r$，再将所得信任势在同一空间进行扩张，然后再合成，便可以得到逻辑结果 h 的支持度 $dps(h,\xi)$，$\forall h\in L_{A\cup P}$。这种分解建立在原子间弱相关条件的基础上，含多重原子交集分解模型的可靠性已经得到证明[5]。

在弱相关条件分解下概率逻辑结果 $h\in L_P$ 的支持度计算算法如下：

(1)先将 ξ 对应的子句集 $\sum$ 进行弱相关条件分解 $\sum=\{\sum_1,\sum_2,\cdots,\sum_n\}$；

(2)构造 n 个小概率推理系统 $(\sum_i,A',P',\prod')(i=1,2,\cdots,n)$，其中 $A'\subseteq A$，$P'\subseteq P$，$\prod'\subseteq\prod$，对每个 $(\sum_i,A',P',\prod')$ 求出信任势 $\varphi_i(i=1,2,\cdots,n)$；

(3)将信任势 φ_i 在 P 上进行扩张；

(4)合成各信任势 $\varphi_i(i=1,2,\cdots,n)$ 得到 φ'，即 $\varphi_1\otimes\varphi_2\otimes\cdots\otimes\varphi_n=\varphi'$；

(5)计算 $dsp(h,\xi)=[\varphi'(H)]_B$，其中 $H=N_p(h)$。

例 3 (同例 2)

构造概率推理系统 $A=\{a,b\}$，$P=\{x_1,x_2,x_3\}$，$\prod=\{0.8,0.5\}$

知识基 ξ 由 $\sum=\{\neg x_1\vee\neg a\vee x_2,\neg x_1\vee\neg b\vee x_2,\neg x_2\vee\neg a\vee x_3,\neg x_2\vee\neg b\vee x_3\}$ 给出。

(1)将 $\sum$ 分解成 $\sum_1$、$\sum_2$，其中：

$\sum_1=\{\neg x_1\vee\neg a\vee x_2,\neg x_1\vee\neg b\vee x_2\}$

$\sum_2=\{\neg x_2\vee\neg a\vee x_3,\neg x_2\vee\neg b\vee x_3\}$

$atom(\sum_1)=\{a,b,x_1,x_2\}\quad atom(\sum_2)=\{a,b,x_2,x_3\}$

(2)构造两个小概率推理系统 $(\sum_1,A_1,P_1,\prod_1)$ 和 $(\sum_2,A_2,P_2,\prod_2)$，并求出相应的信任势 φ_1 和 φ_2。

在第一个小的概率推理系统中 $A_1=\{a,b\}$，$P_1=\{x_1,x_2\}$，$\prod_1=\{0.8,0.5\}$，知识基 ξ_1 由子句集 $\sum_1=\{\neg x_1\vee\neg a\vee x_2,\neg x_1\vee\neg b\vee x_2\}$ 给出，指派 $s_1=(1,1)$，$s_2=(0,1)$，$s_3=(1,0)$ 和 $s_4=(1,1)$。根据定理 2，由 $\sum_1$ 可导出一个位势 $\varphi_1\in\Phi\{a,b,x_1,x_2\}$，焦元集 $FS(\varphi_1)=\{F_1,F_2\}$，其中：

$F_1=\{(1,1),(0,0),(0,1)\}$

$F_2=\{(1,1),(0,1),(1,0),(0,0)\}$

$[\varphi_1(F_1)]_m=p(s_1)+p(s_2)+p(s_3)=0.9\quad [\varphi_1(F_2)]_m=p(s_4)=0.1$

在第二个小的概率推理系统中 $A_2=\{a,b\}$，$P_2=\{x_2,x_3\}$，$\prod_2=\{0.8,0.5\}$，知识基 ξ_2 由 $\sum_2=\{\neg a\vee\neg x_2\vee x_3,\neg b\vee\neg x_2\vee x_3\}$ 给出。指派 $s_1=(1,1)$，$s_2=(0,1)$，$s_3=(1,0)$ 和 $s_1=(1,1)$，得到焦元：

$F_1'=\{(1,1),(0,0),(0,1)\}$

$F_2'=\{(1,1),(0,1),(1,0),(0,0)\}$

$[\varphi_2(F'_1)]_m=p(s_1)+p(s_2)+p(s_3)=0.9\quad [\varphi_2(F_2')]_m=p(s_4)=0.1$

(3)将信任势 φ_1 和 φ_2 在 P 上进行扩张。F_1、F_2、F_1'、F_2' 在 $P=\{x_1,x_2,x_3\}$ 上扩张得：

$X_1=F_1^{\uparrow P}=\{(1,1,1),(1,1,0),(0,0,1),(0,0,0),(0,1,1),(0,1,0)\}$

$X_2=F_2^{\uparrow P}=\{(1,1,1),(1,1,0),(0,1,1),(0,1,0),$

$(1,0,1),(1,0,0),(0,0,1),(0,0,0)\}$

$X_3=F_1'^{\uparrow p}=\{(1,1,1),(0,1,1),(1,0,0),(0,0,0),(1,0,1),(0,0,1)\}$

$X_4=F_2'^{\uparrow p}=\{(1,1,1),(0,1,1),(1,0,1),(0,0,1),(1,1,0),(0,1,0),(1,0,0),(0,0,0)\}=X_2$

则 $[\varphi_1(X_1)]_m=0.9$，$[\varphi_1(X_2)]_m=0.1$，$[\varphi_2(X_3)]_m=0.9$，$[\varphi_2(X_4)]_m=0.1$。

(4)合成。

$[\varphi'(X_1\cap X_3)]_m=[\varphi_1\otimes\varphi_2(X_1\cap X_3)]_m=0.9\times0.9=0.81$

$[\varphi'(X_1)]_m=[\varphi_1\otimes\varphi_2(X_1)]_m=0.9\times0.1=0.09$

$[\varphi'(X_3)]_m=[\varphi_1\otimes\varphi_2(X_3)]_m=0.9\times0.1=0.09$

$[\varphi'(X_4)]_m=[\varphi_1\otimes\varphi_2(X_4)]_m=0.1\times0.1=0.01$

(5)计算支持度 $dsp(x_1\rightarrow x_3,\xi)=[\varphi'(H)]_B$。

所以 $dsp(x_1\rightarrow x_3,\xi)=[\varphi'(H)]_B=\sum_{\substack{X\subseteq H\\ X\in FS(\varphi')}}[\varphi'(X)]_m=0.81$，式中 $H=\{(1,1,1),(1,0,1),(0,1,1),(0,0,1),(0,1,0),(0,0,0)\}$。通过扩张后再合成的优点是不容易丢失有价值的信息。

参考文献

[1] KLEER J D. An assumption-based TMS [J]. Artificial Intelligence，1986(28)：127-162.

[2] KLEER J D. Extending the ATMS[J]. Artificial Intelligence，1986(28)：163-196.

[3] 张晨东，陈火旺，王兵山，等.概率逻辑推理的弱相关分解方法[J].计算机学报，1997，20(10)：894-898.

[4] HAENNI R，KOHLAS J，LEHMANN N. Probabilistic argumentation systems [M]. Handbook of Defeasible Reasoning and Uncertainty Management Systems，Volume 5：Algorithms for Uncertainty and Defeasible Reasoning. Kluwer Academic Publishers，2000.

[5] 张晨东，谢兵，陈火旺，等.概率逻辑含多重原子交集分解模型的可靠性[J].计算机研究与发展，1998，35(8)：673-677.

(收稿日期：2010-11-04)

作者简介：

曾子林，女，1981年生，硕士，讲师，主要研究方向：不确定性推理。