

随动控制系统下的齿轮螺旋线拟合方法研究

马忠祥, 赵军, 刘宇

(中国计量学院, 浙江 杭州 310018)

摘要: 设计了随动控制型齿轮测量系统齿轮误差计算模型。利用随动控制系统作为测量齿轮螺旋线偏差的控制方式, 以被测齿轮的螺旋线偏差为研究对象; 对被测齿轮的实际螺旋线建立分析模型, 对其跟踪轨迹进行螺旋线拟合, 并实现螺旋线偏差的计算。本模型能够在简化系统运动控制方式和结构情况下, 有效地测量齿轮螺旋线误差, 并对建立的分析模型的准确性进行了验证。

关键词: 随动控制; 跟踪测量; 螺旋线拟合

中图分类号: TH702

文献标识码: A

文章编号: 1674-7720(2011)01-0080-03

Research of the gear spiral fitting method under the servo control system

Ma Zhongxiang, Zhao Jun, Liu Yu

(China Jiliang University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: Designed servo-controlled gear measuring system of calculate gear error model. Use the servo control system to measure gear spiral deviation as the control method, and study the spiral deviation of the measured gear, establish model on the actual measured gear spiral, fitting the tracking trajectory. It can simplify the structure of motion control and the circumstances, effectively measure the gear helix error and the accuracy of established model was verified.

Key words: servo control; tracking measure; helix fitting

齿轮测量技术的发展历程以齿轮精度理论的发展为前提, 为了提高测量齿轮误差的精度, 齿轮测量技术先后出现了机械展成式测量技术、齿轮整体误差测量技术、CNC 坐标测量技术及非接触测量技术。前三项测量技术都采用精密运动控制作为测量齿轮偏差的控制基础, 运动控制系统对齿轮误差测量精度有很大影响。

随动控制方式^[1]的提出, 丰富了现有齿轮误差测量控制系统的控制方式, 简化了测量仪器的硬件结构, 并且能够实现跟踪实时测量。

基于随动控制系统的齿轮测量仪结构如图 1 所示。在测量过程中, 被测齿轮 1 绕其回转轴匀速转动, 与被测齿面接触的电感传感器测头 2 有一个位移变化量, 使得电感传感器对应有一个位移输出量。为使电感传感器 3 的输出稳定在零附近的一定阈值内, 控制测量滑块 4 带动电感传感器做轴向运动, 电感传感器测头 2 跟随被测齿轮沿其中心轴线方向作相应的跟随移动, 此时, 电

感传感器测头相对于被测齿轮的运动轨迹即为被测螺旋线(实际曲线)。

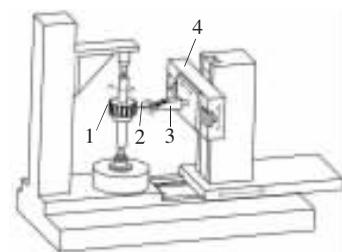


图 1 齿轮测量仪结构示意图

本文在采用随动控制系统作为测量齿轮误差的基础上, 利用随动控制特性, 相对于被测齿轮做跟随运动并进行点测量, 利用各个测量点对被测齿轮的螺旋线进行拟合, 从而实现齿轮螺旋线偏差的测量。

1 模型建立

被测齿轮绕其中心轴作匀速旋转运动, 与被测齿轮

表面相接触的一点同时沿与中心轴线平行方向匀速移动,这一点在此被测面上的运动轨迹即为螺旋线(如图2)。

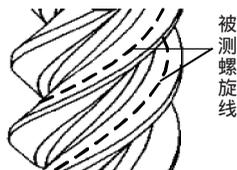


图2 圆柱齿轮被测螺旋线

在随动控制系统的作用下,电感传感器在Z轴方向上的跟随运动是变速运动,所以在此测量坐标系中的螺旋线参数方程^[2]为:

$$\begin{cases} x=R \cos(\omega t+\phi) \\ y=R \sin(\omega t+\phi) \\ z=\int_0^t v(t) dt \end{cases} \quad (1)$$

由于在初始状态下 $v_0=0$, $z=\frac{1}{2}at^2$, 并令 $z'=\sqrt{\frac{2z}{a}}$, 得到:

$$\begin{cases} \omega=\left[\arctan\left(\frac{y_1}{x_1}\right)-\arctan\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\right]/(z'_1-z'_0) \\ \phi=\left[\arctan\left(\frac{y_1}{x_1}\right)z'_1-\arctan\left(\frac{y_0}{x_0}\right)z'_0\right]/(z'_1-z'_0) \end{cases} \quad (2)$$

但在一般的测量过程中,被测螺旋线的坐标系并非一定就是测量坐标系,需要通过三维坐标旋转实现测量坐标系和被测螺旋线的坐标系之间的转换。

复合变换法^[3]是三维坐标变换方法中最基础的变换方法,它的数学表示基于矩阵理论,主要与7个参数相关联,即沿坐标轴的3个平移参数(X_0 、 Y_0 、 Z_0)、绕3个坐标轴的3个旋转参数(R_x 、 R_y 、 R_z)、一个尺度因子 k ,所以包含螺旋线的圆柱体可用一般二次多项式隐函数形式表示为:

$$X^TAX+b^T X+c=0 \quad (3)$$

上式中, A 为 3×3 的对称矩阵, b 和 X 为 3×1 的矩阵, c 为实数。按照求实对称矩阵特征值的雅可比法,存在正交旋转矩阵 B ,使得

$$B^T A B=\Lambda \quad (4)$$

Λ 为特征值矩阵,对比圆柱体标准方程,对于圆柱体,特征矩阵 Λ 中有一个特征值为0。

$$A=\begin{bmatrix} d & & \\ & d & \\ & & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

令 $y=(y_0 \ y_1 \ y_2)=B^T X$, $e=(e_0 \ e_1 \ e_2)=B^T b$, 则二次多项式隐函数方程变为:

$$y^T A y+e^T y+c=0 \quad (6)$$

根据圆柱体的标准方程,可知上式中的 $e_2=0$, 这时变为:

$$dy^2_0+dy^2_1+e_0y_0+e_1y_1+c=0 \quad (7)$$

最后经过整理得到:

$$\frac{(y_0+\frac{e_0}{2d})^2}{\lambda/d}+\frac{(y_1+\frac{e_1}{2d})^2}{\lambda/d}=1 \quad (8)$$

上式即为实际被测螺旋线在此测量坐标系中所在圆柱体的标准方程, $R=\sqrt{\lambda/d}$ 。

2 参数求解

如果被测的点没有准确位于螺旋线上,就需要对参数 R 、 ω 、 ϕ 进行估计。首先根据测得的数据点计算 R 、 ω 的值。通常采用的是最小二乘法,当 z_i 已知时,第 i 个测量点到螺旋线的代数距离^[4]可以表示为:

$$\begin{aligned} D^2(R, \omega, \phi) &= \\ &= \sum_{i=1}^N |(x_i, y_i, z_i) - (R \cos(\omega z'_i + \phi), R \sin(\omega z'_i + \phi), z_i)|^2 \\ &= \sum_{i=1}^N [(x_i - R \cos(\omega z'_i + \phi))^2 + (y_i - R \sin(\omega z'_i + \phi))^2] \end{aligned} \quad (9)$$

对上式求偏导可求得 R :

$$R = \frac{1}{N} \sum x_i \cos \psi_i + y_i \sin \psi_i \quad (10)$$

上式中 $\psi_i = \omega z'_i + \phi$

再对 ω 和 ϕ 求导可化为:

$$\begin{cases} \cos \phi \sum z'_i (x_i \sin(\omega z'_i) - y_i \cos(\omega z'_i)) + \\ \sin \phi \sum z'_i (x_i \cos(\omega z'_i) + y_i \sin(\omega z'_i)) = 0 \\ \cos \phi \sum (x_i \sin(\omega z'_i) - y_i \cos(\omega z'_i)) + \\ \sin \phi \sum (x_i \cos(\omega z'_i) + y_i \sin(\omega z'_i)) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

如果令:

$$p_0 = \sum z'_i (x_i \sin(\omega z'_i) - y_i \cos(\omega z'_i))$$

$$p_1 = \sum z'_i (x_i \cos(\omega z'_i) + y_i \sin(\omega z'_i))$$

$$q_0 = \sum (x_i \sin(\omega z'_i) - y_i \cos(\omega z'_i))$$

$$q_1 = \sum (x_i \cos(\omega z'_i) + y_i \sin(\omega z'_i))$$

同时令

$$u(\phi) = (\cos \phi, \sin \phi) \quad (12)$$

最后可得到关于 ω 的函数方程:

$$p_0 q_1 - p_1 q_0 = 0 \quad (13)$$

可以利用(3)~(4)式求得参数 ω 的初值,再根据单变量的标准数值寻根方法来迭代求解出 ω 。当 ω 知道后,可以计算得到 (p_0, p_1) ,再由(13)式可得到:

$$\phi = \arctan\left(\frac{-p_0}{p_1}\right) \quad (14)$$

齿轮的螺旋线由于制造误差等原因,其上的实际点坐标相对于理论螺旋线会有偏差,于是可以求得被测齿轮螺旋线上某点的偏差^[5]:

$$\Delta_i = \sqrt{(x_i - R \cos(\omega z'_i + \phi))^2 + (y_i - R \sin(\omega z'_i + \phi))^2} \quad (15)$$

3 实验仿真与分析

已知一圆螺旋线中的制造误差 $\delta = \pm 0.003$, 它的参数方程 $R=4.000$, $\omega=2.0$, x 、 y 、 z 分别为已知螺旋线空间坐标值, Δ 为各个坐标点的偏差值,实验仿真数据如表1所示。

表 1 螺旋线坐标值

序号	空间坐标		
	x_i/mm	y_i/mm	z_i/mm
1	3.994	0.250	0.030
2	3.930	0.746	0.095
3	3.805	1.232	0.157
4	3.623	1.694	0.219
5	3.383	2.134	0.282
6	3.084	2.547	0.346
7	2.746	2.909	0.407
8	2.357	3.232	0.471
9	1.935	3.501	0.533
10	1.476	3.718	0.597
11	1.001	3.873	0.659
12	0.501	3.968	0.723
13	0.003	4.003	0.784
14	-0.506	3.967	0.847
15	-0.990	3.875	0.909
16	-1.473	3.719	0.972
17	-1.929	3.504	1.035
18	-2.354	3.233	1.098
19	-2.742	2.912	1.161
20	-3.080	2.552	1.223
21	-3.378	2.141	1.286
22	-3.621	1.699	1.349
23	-3.802	1.241	1.411
24	-3.929	0.749	1.474
25	-3.992	0.249	1.537
26	-3.991	-0.255	1.600
27	-3.928	-0.755	1.663

首先对参数 R 和 ω 进行估计, 然后利用迭代法^[6]得到 $R=3.999\ 8$ 和 $\omega=2.002\ 1$, 最后利用公式(15)求得各点的偏差如表 2 所示, 然后求得螺旋线偏差 $\Delta_{\text{max}}=0.007\ 8\ \text{mm}$, 其中 $\Delta z_i=z_{i+1}-z_i$ 。

表 2 各点偏差值和 z 值变化量

$\Delta z_i/\text{mm}$	Δ_i/mm	$\Delta z_i/\text{mm}$	Δ_i/mm	$\Delta z_i/\text{mm}$	Δ_i/mm
0.065	0.0104	0.062	0.0061	0.062	0.0044
0.062	0.0048	0.064	0.0093	0.063	0.0080
0.062	0.0044	0.061	0.0036	0.063	0.0082
0.063	0.0073	0.063	0.0076	0.062	0.0045
0.064	0.0096	0.062	0.0041	0.063	0.0085
0.061	0.0026	0.063	0.0075	0.063	0.0083
0.064	0.0092	0.063	0.0074	0.063	0.0082
0.062	0.0050	0.063	0.0074	0.063	0.0080
0.064	0.0095	0.063	0.0068		

各点的偏差值和 z 值的相关性如图 3 所示。从图 3 可以发现, 螺旋线上某点的偏差值和 z 轴方向上 z 值的变化量存在对应关系, 当偏差值比较大时, z 轴方向上 z 值的变化量也跟着变大; 当偏差值比较小时, z 轴方向上 z 值的变化量也跟着变小, 它们的相关系数为 0.951, 反映出随动控制和跟踪测量的特点。

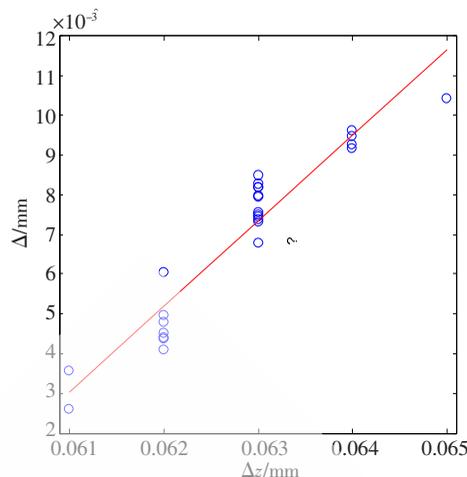


图 3 各点的偏差值和 z 值变化的相关性

本文从螺旋线的形成原理作为问题研究的切入点, 根据随动控制系统的控制特点, 提出了一种新的齿轮螺旋线拟合的方法, 然后利用最小二乘法求得拟合螺旋线的相关参数, 最后得到实际被测螺旋线的偏差。从实验结果看, 利用随动控制系统进行齿轮螺旋线的拟合, 再结合控制系统对螺旋线进行误差评定, 可以作为一种被测齿轮螺旋线精度估计的有效方法。

参考文献

[1] 赵军, 刘维, 马忠祥, 等. 基于随动控制的齿轮测量方法[J]. 工具技术, 2010, 44(4): 75-78.
 [2] 陈基伟. 螺旋线拟合应用研究[J]. 北京联合大学学报(自然科学版), 2008, 22(4): 2-4.
 [3] 王解先, 徐志京. 三种坐标间转换的雅可比矩阵数值导数计算方法[J]. 大地测量与地球动力学, 2004, 24(4): 1-2.
 [4] 沈永欢, 梁在中, 许履瑚, 等. 实用数学手册[M]. 北京: 科学出版社, 2002.
 [5] 张泰昌. 齿轮检测 500 问[M]. 北京: 中国标准化出版社, 2007.
 [6] 朱静芬, 韩丹夫. “牛顿类”迭代的收敛性和误差估计[J]. 浙江大学学报(理学版), 2005, 32(6): 1-3.

(收稿日期: 2010-07-12)

作者简介:

马忠祥, 男, 1985 年生, 硕士研究生, 主要研究方向: 几何量测量技术。