

基于自适应参数高阶偏微分方程的图像平滑

郭三华¹, 高竹红², 曹丽娟³, 宁志山¹, 初玲¹

- (1. 烟台汽车工程职业学院 电子工程系, 山东 烟台 265500 ;
2. 深圳市中兴通讯股份有限公司, 广东 深圳 5180550;
3. 烟台汽车工程职业学院 科研处, 山东 烟台 265500)

摘要: 为消除经典 P-M 方法在图像平滑时引起的“阶梯”效应, 提出了基于自适应参数的高阶偏微分方程图像平滑方法, 并且利用 Mean Shift 的核密度估计方法来确定各点阈值参数。与固定阈值参数的各向异性扩散方法相比, 该方法有效地保持了图像的边缘等重要信息, 能够更大程度地抑制孤立噪声, 从而得到更高的 PSNR 值和更好的视觉效果。

关键词: 图像平滑; 自适应参数; 各向异性扩散; 高阶偏微分方程

中图分类号: TP391.41

文献标识号: A

文章编号: 1674-7720(2010)18-0040-04

Image smoothing based on high order PDE of adaptive parameter

GUO San Hua¹, GAO Zhu Hong², CAO Li Juan³, NING Zhi Shan¹, CHU Ling¹

(1. Department of Electronic Engineering, Yantai Vocational College of Automotive Engineering, Yantai 265500, China;

2. Zhongxing Telecommunication Equipment Co., Ltd., Shenzhen 518055, China;

3. Department of Scientific Research, Yantai Vocational College of Automotive Engineering, Yantai 265500, China)

Abstract: In order to eliminate the “step” effect by P-M equation, a method for image smoothing based on high order PDE of adaptive parameter is proposed, which introduces mean shift kernel density estimation to determine every point threshold. Compared with the anisotropic diffusion method of fixed parameter, our method effectively enhances the important information of image and the details of image edges. It can get higher PSNR value and better visual effect by inhibiting isolated noise to a more great extent.

Key words: image smoothing; adaptive parameter; anisotropic diffusion; high order PDE

图像平滑作为图像预处理基本步骤之一, 为后继图像处理带来很大方便, 最常见图像平滑方法是线性高斯滤波。KOENDERINK 指出图像 $I_0(x, y)$ 与不同尺度的高斯核卷积所得到的平滑图像等价于传导系数为常数的热扩散方程的解, 此解属于各向同性扩散, 在平滑同时造成图像特征的模糊化^[1]。PERONA 等提出了如下各向异性扩散模型^[2]:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \text{div}(g(\|\nabla I\|, k) \cdot \nabla I) \quad (1)$$

其中, div 是散度算子; $g(\cdot, k)$ 称为“边界处停止平滑函数”, 用来保持边缘; $g(\cdot, k)$ 是递减函数且满足以下两个条件: (1) $g(0) = 1$; (2) $\lim_{s \rightarrow \infty} g(s) = 0$ 。分析表明, P-M 各向异性滤波实际上实现了一种选择性平滑机制^[3], 参数 k 的作用相当于选择滤波器阈值。在某点处 $\|\nabla I(x, y, t)\| < k$,

就被认为该点处于区域内部并对其进行平滑, 否则认为该点处于边缘对其进行增强。由于 P-M 各向异性滤波具有选择性平滑机制, 在平滑图像区域内部同时又保持原始图像边缘结构, 因此达到了优于线性滤波器的效果。滤波器阈值参数决定滤波器的性能, 该值起到一种边缘检测作用。“阶梯”效应一直是困扰着 P-M 方法的严重问题^[4], 这是由它的偏微分方程所决定的, 是所有低阶非线性扩散方法所固有的。

基于上述问题, 在图像平滑时提出了基于自适应的高阶偏微分方程图像平滑方法, 避免了传统 P-M 方法图像平滑方法的缺陷, 获取比较好的视觉效果。

1 高阶方法的提出

P-M 方法处理结果是分段恒定的^[5], 容易导致结果图像“阶梯”状分布, 视觉效果不理想。而高阶方法的处

图形、图像与多媒体

理结果是分段线性的,在视觉感知上明显优于P-M方法。

首先,对图像 I 进行坐标变换,将笛卡尔儿 $(x-y)$ 坐标系转换到 $(\eta-\xi)$ 坐标系下,其中 η 表示点 p 法线方向, ξ 表示点 p 切线方向, $[I_x, I_y]$ 为图像 I 梯度方向, 可得如下变化公式:

$$\eta = \frac{[I_x, I_y]}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}}, \quad \xi = \frac{[-I_y, I_x]}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}}$$

根据二维平面的坐标转换公式有 $I_\eta = (I_x \cos\alpha + I_y \sin\alpha)$

其中:

$$\cos\alpha = \frac{I_x}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{I_y}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}}$$

对上式分别进行 x 和 y 求导,得到:

$$\frac{\partial I_\eta}{\partial x} = I_{xx} \cdot \cos\alpha + I_{xy} \cdot \sin\alpha, \quad \frac{\partial I_\eta}{\partial y} = I_{xy} \cdot \cos\alpha + I_{yy} \cdot \sin\alpha \quad (2)$$

进一步得出:

$$I_{\eta\eta} = \frac{\partial I_\eta}{\partial x} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial I_\eta}{\partial y} \cdot \sin\alpha = \frac{I_x^2 I_{xx} + 2I_x I_y I_{xy} + I_y^2 I_{yy}}{I_x^2 + I_y^2} \quad (3)$$

同理可以得出:

$$I_{\xi\xi} = \frac{I_y^2 I_{xx} - 2I_x I_y I_{xy} + I_x^2 I_{yy}}{I_x^2 + I_y^2}, \quad I_{\eta\xi} = \frac{-I_x I_y I_{xx} - I_y^2 I_{xy} + I_x^2 I_{yy}}{I_x^2 + I_y^2}$$

定义相关的算子:

$$\bar{h} = \sqrt{\frac{I_{\eta\eta}^2 + I_{\xi\xi}^2 + 2I_{\eta\xi}^2}{2}} \quad (4)$$

再考虑定义在图像区域 Ω 上的泛函:

$$E(I) = \int_{\Omega} F(\bar{h}) d\Omega \quad (5)$$

其中 $I \in C^4(\Omega)$, 函数 $F(\cdot) \geq 0$ 是递增函数, 即 $F'(\cdot) > 0$ 。由算子 \bar{h} 定义可知, 图像 I 噪声越大, 式(5)的泛函值就越大。所以最小化 $E(I)$ 就相当于对图像进行平滑。

式(5)是如下泛函的特殊形式:

$$E(I) = \int_{\Omega} F(\eta, \xi, I, I_\eta, I_\xi, I_{\eta\eta}, I_{\eta\xi}, I_{\xi\xi}) d\Omega \quad (6)$$

根据变分理论, 可知式(6)对应的 Euler-Lagrange 方程为:

$$\frac{\partial F}{\partial I} - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial F}{\partial I_\eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial F}{\partial I_\xi} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial F}{\partial I_{\eta\eta}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi} \left(\frac{\partial F}{\partial I_{\eta\xi}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial F}{\partial I_{\xi\xi}} \right) = 0$$

于是可以得到式(5)的 Euler-Lagrange 方程:

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(\frac{F(\bar{h})}{\bar{h}} I_{\eta\eta} \right) + 2 \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi} \left(\frac{F(\bar{h})}{\bar{h}} I_{\eta\xi} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\frac{F(\bar{h})}{\bar{h}} I_{\xi\xi} \right) = 0 \quad (7)$$

式(7)可用梯度下降法求解:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = - \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(\frac{F(\bar{h})}{\bar{h}} I_{\eta\eta} \right) + 2 \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi} \left(\frac{F(\bar{h})}{\bar{h}} I_{\eta\xi} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\frac{F(\bar{h})}{\bar{h}} I_{\xi\xi} \right) \right) \quad (8)$$

其中, $\frac{F(\bar{h})}{\bar{h}}$ 是扩散系数, 按 Perona-Malik 方法取 $\frac{F'(\bar{h})}{\bar{h}} =$

$\exp\left(-\left(\frac{\bar{h}}{k}\right)^2\right)$, k 是阈值参数。通过分析可知选取不同的 k 值控制图像特征和保持平滑。

2 自适应阈值的参数估计

参数 k 的选取是非线性扩散方法的一个主要难题。如何确定扩散的范围及扩散的程度, 使降噪和强化顺利进行的同时, 图像信息又不致因过度平滑而大量损失, 是应用时需要解决的关键问题。传统确定参数的方法是人为指定一个固定常数。一般来说, 不同图像需要设置不同参数值, 后来也有学者提出自动估计梯度阈值的方法, 如提出自动估计梯度阈值的公式 Sapiro^[4]:

$$k = 1.4826 \text{ MAD}(\nabla I) = 1.4826 \text{ median}_1(\|\nabla I - \text{median}_1(\|\nabla I\|)\|)$$

由于图像不同区域边缘强度分布不一致, 噪声也不同, 而且不同尺度空间边缘强度和噪声也不一样, 因此对整幅图像使用同一个全局固定的参数是不合适的。本文提出了自适应阈值参数选择方法, 使得该算法阈值参数可以完全自动确定, 真正实现自适应阈值参数非线性滤波。

2.1 阈值参数估计

图像平滑可看作是一个估计问题: 对于图像上每一点 x , 观测图像在该点邻域内取值构成一个观测样本集, 要解决的就是如何从观测样本集中估计出原始图像在该点的真实值 $u(x)$ 。如果某点 x 的邻域 N_r 中像素点都属于同一区域, 则算子 \bar{h} 在 N_r 内的概率分布为单峰分布; 如果邻域 N_r 中包含了两个或多个区域, 则 \bar{h} 在 N_r 内概率分布为多峰分布, 如图 1 所示。

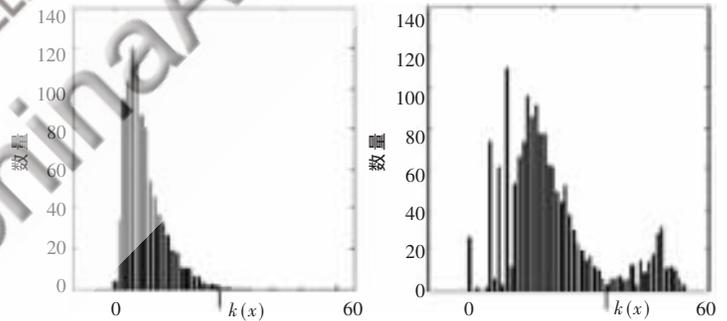


图 1 算子 \bar{h} 的分布及参数选择示例

(a) 邻域内点属于同一区域 (b) 邻域内点属于不同区域

因此, 可以按照以下原则选择点处 x 的参数 $k(x)$:

(1) 若点 x 邻域内样本算子 \bar{h} 为单峰分布(如图 1(a)所示), 取 $k(x)$ 为其截止点, 即算子 \bar{h} 直方图中绝对值最大非零点;

(2) 若点 x 邻域内样本算子 \bar{h} 为多峰分布(如图 1(b)所示), 选择 $k(x)$ 为算子 \bar{h} 直方图中绝对值最小谷值点。

据上述分析得如下结论:

(1) 当邻域位于区域内部时, 可以对图像尽量进行平滑;

(2) 当邻域内存在多个区域时, 平滑尺度不会超过区域边缘强度最小值, 从而尽可能地保持原图像边缘等重要信息。

图形、图像与多媒体

Image Processing and Multimedia Technology

上述分析完全是一种理想化假设,对于实际图像处理存在如下两大困难:

(1)由于邻域内所取样本有限,从样本直方图不能直接得到完全规则分布的曲线,很难正确地选取阈值参数 $k(x)$ 值。

(2)现实图像中,即使在同一区域内,平均灰度值往往是变化的,而不是严格满足分段常数模型。

为克服以上问题,采取 Mean Shift 核平滑方法对算子直方图进行处理,使其尽可能准确地刻画多峰分布情况。

2.2 直方图平滑算法

根据前面分析可知,算子 h 直方图可反映概率分布情况,所以可在邻域 N_r 内计算 h 的值来进行直方图统计。设 x 点邻域内算子 h 统计直方图为 $H(d), d=-N, \dots, N$ 。采用 Mean Shift 核密度估计方法对直方图进行平滑^[6]。

$$\tilde{H}(d) = \sum_{i=-N}^N H(i) k\left(\frac{d-i}{h}\right), (d=-N, \dots, N)$$

其中, $\tilde{H}(d)$ 为 $H(d)$ 的估计, $K(\cdot)$ 为概率密度估计核函数,为使核密度估计渐近均方误差最小,可选择 Epanechnikov 形式^[6],如式(9)所示。 h 为核函数尺度参数,可按式(10)的准则计算:

$$K(u) = \begin{cases} 3(1-u^2)/4 & |u| < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (9)$$

$$h = \left(\frac{243R(K)}{35\mu_2(K)n} \right)^{1/5} \hat{\sigma} \quad (10)$$

其中, $R(K) = \int_{-1}^1 K(u)^2 du$, $\mu_2(K) = \int_{-1}^1 u^2 K(u) du$, $\hat{\sigma}$ 是样本标准差,这里使用 MAD 估计为:

$$\hat{\sigma} = 1.4826 \text{MAD}(\{d(i,j)\}, i, j \in N_r(x))$$

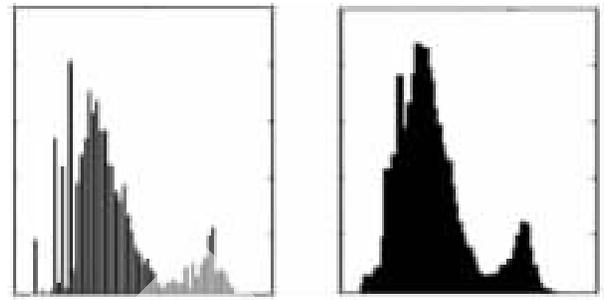
直方图平滑效果示例如图 2 所示。

为了降低计算复杂度,在估计参数 $k(x)$ 时,每隔 $r/2$ 距离计算一次(r 为邻域半径),然后对每个像素点选择最近邻的最小值近似为该点阈值参数,并且每一次迭代之后更新参数 $k(x)$ 值,也可设置每隔若干迭代次数更新一次参数 $k(x)$ 值,这样可保证一定精度的前提下,大大提高效率。由于基于直方图算法复杂度较低,阈值参数估计计算相对于图像平滑本身计算开销较小。

3 实验结果及分析

为了比较自适应参数的高阶方法和 P-M 方法平滑的性能,进行不同实验并加以分析。

(1)选用若干幅标准图像进行测试,图 3 显示没有加入噪声的 Grid 图像平滑效果,从图中可看出当迭代次数比较多时,P-M 方法



(a) 原始直方图 $H(d)$ (b) 核平滑后直方图 $\tilde{H}(d)$

图 2 算子 h 直方图平滑的效果示例



(a) 原始无噪声图像 (b) P-M 方法 (c) 本文方法

图 3 对无噪声图像处理效果比较(迭代次数为 100)

平滑的部分边缘明显被模糊了,而本文方法获取的效果比较理想。

(2)图 4 是对加入噪声的图像去噪的实验结果,图 5 给出了对图 4 各边缘的提取结果,其中图 5(b)采用最经典的 Canny 边缘提取算子。从图 4 和图 5 中可看出,P-M 方法抑制孤立噪声点和保持图像边缘的效果并不十分理想。图 4(b)和图 5(b)中,平滑后天空和地面存在很多孤立噪声点,建筑物边缘也很模糊,图像中细节信息也有较大程度损失。从图 4(c)和图 5(c)来看,本文方法很好地实现了图像平滑和保持边缘的折衷,保证了图像视觉连续性,其视觉效果明显优于 P-M 方法。

对于图 4(b)和图 4(c)而言,在迭代次数相同的情况下,自适应参数高阶方法所能达到峰值信噪比比 P-M 方法所能达到峰值信噪比要高得多,并且平均耗时比 P-M 方法增加不到 20%。表 1 为对于 Cameraman 图自适应参数高阶方法与 P-M 方法运行时间和峰值信噪比的



(a) 原始噪声图像

(b) P-M 方法

(c) 本文方法

图 4 对加入高斯噪声(标准差为 0.1)图像平滑效果比较



(a) 对图 4(a)边缘提取



(b) 对图 4(b)边缘提取



(c) 对图 4(c)边缘提取

图 5 对应图 4 边缘提取处理结果图

表 1 算法运行时间和峰值信噪比的对比

	PSNR/dB	所用时间/s
P-M 方法	24.41	7.12
适应参数高阶方法	28.45	8.46

对比结果。

本文首先对经典 P-M 方程存在两大问题进行分析,提出了自适应参数高阶偏微分方法,有效解决了 P-M 方法“阶梯”效应及其阈值参数选取问题,图像平滑效果比较好,在耗时相对不长的情况下所能达到的峰值信噪比也 P-M 方法高。

参考文献

- [1] BARASH D, COMANCIU D. A common framework for nonlinear diffusion, adaptive smoothing, bilateral filtering and mean shift [J]. Image and Vision Computing, 2004, 22(1):73-81.

- [2] PERNA P, MALIK J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion[J]. IEEE Trans on Pattern Anal Machine Intell, 1990:12(7): 629-639.

- [3] YOU Y L, XU W, TANNENBAUM A, et al. Behavioral analysis of anisotropic diffusion in image processing [J]. IEEE Trans. Image Processing, 1996(5):1539-1553.

- [4] WAND M P, JONES M C. Kernel smoothing [M]. New York: Chapman

& Hall, 1995.

- [5] BLACK M J, SAPIRO G, MARIMONT D H, et al. Robust anisotropic diffusion[J]. IEEE Trans on Image Processing, 1998,7(3):421-432.

- [6] YOU Y L, KAVEH M. Fourth-order partial differential equations for noise removal[J].IEEE Transactions on Image Processing. 2000,9(10):1723-1730.

(收稿日期:2010-07-12)

作者简介:

郭三华,男,1982年生,硕士研究生,讲师,主要研究方向:数字图像处理。

高竹红,男,1982年生,工程师,硕士研究生,主要研究方向:数字图像处理。

曹丽娟,女,1981年生,讲师,硕士研究生,主要研究方向:数字图像处理。