

# 电容层析成像图像重建算法研究

刘传美

(北方工业大学 机电工程学院自动化系, 北京 100144)

**摘要:** 图像重建算法是电容层析成像系统的关键技术之一, 是改善重建图像质量的重要因素。在正则化的基础上提出了一种基于 QR 分解的电容层析成像算法, 该方法首先将离散化和线性化处理后的电容层析成像物理模型进行 Tikhonov 正则化处理, 然后将 QR 分解的思想引入电容层析成像方程中求解出初始图像, 然后再对初始图像进行优化修正提高重建图像质量。成像结果表明, 图像重建结果与实际相符, 图像质量得到了改善。

**关键词:** 电容层析成像; 图像重建算法; 正则化; 优化修正; QR 分解

中图分类号: TP301.6

文献标识码: A

## Study on image reconstruction algorithms of electrical capacitance tomography

LIU Chuan Mei

(Department of Automation, College of Mechanical Electrical and Engineering, North China University of Technology, Beijing 100144, China)

**Abstract:** Image reconstruction algorithm is one of an important factor in electrical capacitance tomography system research, and it is used to improve the image reconstruction quality. An image reconstruction algorithm based on QR decomposition is presented on the basis of regularization. Firstly, the linear model of electrical capacitance tomography is regularized using Tikhonov method, and then by introducing QR decomposition the equation can be solved, then the initial image is revised using optimization revision method, in order to enhance the reconstructed image quality. Imaging results show that the model is reliable, the accuracy of algorithm is higher, the reconstructed image accords with the actual situation, and the quality of reconstructed image is improved.

**Key words:** electrical capacitance tomography; image reconstruction algorithm; regularization; optimization revision; QR decomposition

电容层析成像(ECT)技术是基于电容敏感原理的过程层析成像技术, 运用传感器阵列形成旋转的空间敏感场, 从不同的观测角度获得被测物场的介电常数分布信息, 利用图像重建算法, 显示被测物场的二维或三维介质分布图像。

典型的 ECT 系统结构主要由 3 部分构成: 电容阵列传感器、数据采集系统和成像计算机。其基本原理是: 位于管道内具有不同介电常数的两相流在流动时, 各相含量和分布不断变化, 引起电容传感器不同极板间的电容值改变。通过均匀安装在绝缘管道外壁的电容传感器检测出各电极间的电容值, 送至数据采集系统。数据采集系统将这些电容值转化为数字量并传送给成像计算机,

根据某种图像重建算法重建出流体在截面的分布图像。

### 1 ECT 系统图像重建算法

ECT 系统图像重建是一个逆问题, 即通过有限个电容测量值将成像区域内的介电常数空间分布图重建出来。由于电容层析成像系统本身固有的“软场”特性, 且能得到的独立电容测量值数量非常有限, 逆问题不存在解析解, 图像重建的难度较大。

针对目前图像重建算法在成像质量和成像速率上存在的问题, 本文提出一种基于 QR 分解的电容层析成像算法。该方法首先将 ECT 物理模型进行规范化和 Tikhonov 正则化处理, 进而将 QR 分解的思想引入 ECT 方程的求解中实现图像重建。

## 1.1 ECT 系统的数学模型

ECT 技术图像重建可描述为两大内容:一是正问题的建模,二是逆问题的求解。ECT 系统的正问题模型为<sup>[1-2]</sup>:

$$C_{i,j} = \iint_D \varepsilon(x,y) S_{i,j}[x,y, \varepsilon(x,y)] dx dy \quad (1)$$

式中,  $i, j$  分别表示源电极和测量电极的编号,  $D$  表示管道横截面积,  $\varepsilon(x,y)$  表示管道内电介质的分布函数,  $S_{i,j}[x,y, \varepsilon(x,y)]$  为极板电容  $C_{i,j}$  的分布函数, 即  $C_{i,j}$  对点  $(x,y)$  处的电介质的敏感程度。

对式(1)进行离散化和线性化处理, 可得到矩阵表示的 ECT 系统的正问题模型<sup>[1,3-4]</sup>:

$$C = SG \quad (2)$$

$C$  为归一化的电容值;  $G$  为归一化的介电常数分布, 即像素的灰度值;  $S$  为归一化的灵敏度矩阵。需要指出的是, 式(2)是经过降质处理的简化模型, 用它求解逆问题进行图像重建时必然会带来误差, 需要对图像进行修正。

## 1.2 正则化求解系统逆问题

病态逆问题往往是由于缺乏足够的信息而导致的。正则化方法的原理是找到一个由先验信息约束的解集, 然后再从中选择 1 个解。一个 ECT 系统经过降质处理的正问题的线性化模型如式(2), 是一个病态逆问题求解, 而 Tikhonov 正则化方法是一种应用最普遍的解决病态逆问题的方法。

ECT 系统的逆问题就是通过获得的电容测量值去重建介质在检测区域内的介电常数分布图。由于像素个数(文中区域划分为 1 780 个)多于观测数据(文中是 28 个电容测量值), 对于式(2)而言是未知数大于方程个数, 是个欠定方程, 具有无穷多个解, 但有最小二乘最小范数解, 因此逆问题模型可以表述如下<sup>[5]</sup>:

$$G^+ = S^T(SS^T)^{-1}C = S^+C \quad (3)$$

式中,  $S^+$  为观测矩阵  $S$  的广义逆;  $G^+$  为  $G$  的最小二乘解, 即重建的图像灰度值的估计值。用广义逆求解逆问题具有不适定解, 测量数据的微小波动将引起解的较大变化, 导致解不稳定。消除这种解不稳定的有效方法之一是采用正则化法。Tikhonov 在研究第一类 Fredholm 方程时提出了一种正则化算法, 这种算法对于每一个正则化参数使下面的泛函达最小<sup>[6-7]</sup>:

$$\phi_\mu[f] = P Df - g P^2 + \mu P f P^2 \quad (4)$$

式中,  $\mu$  为正则化参数,  $D$  为降质算子,  $f$  为被测信号,  $g$  为观测信号。

对应于 ECT 系统, 式(4)使泛函变为:

$$\phi_\mu[G] = P SG - CP^2 + \mu PG P^2 \quad (5)$$

达最小, 即令:

$$\frac{\partial \phi_\mu}{\partial G} = \frac{\partial}{\partial G} [(SG - C)^T(SG - C) + \mu G^T G] = 0 \quad (6)$$

则对于  $\mu > 0$ , 有正则化解:

$$G = (S^T S + \mu I)^{-1} S^T C = S^{\mu} C \quad (7)$$

$S^{\mu} = (S^T S + \mu I)^{-1} S^T$  为 Tikhonov 正则化广义逆, 是一个  $(1\ 780 \times 28)$  维矩阵;  $I$  为单位矩阵。正则化参数  $\mu$  控制着正则化先验知识与测量数据的权重, 其取值非常关键, 理论上确定  $\mu$  的大小很困难, 通常要根据试验设定。

## 1.3 基于 QR 分解的图像重建算法

正则化虽然能使方程系数矩阵的条件数大大降低, 但这只是在一定程度上改善了系数矩阵的病态性, 方程解的熟练依旧需要较高的迭代次数, 因此不能满足过程成像的实时性要求。为此, 在此基础上提出了基于 QR 分解<sup>[8]</sup>的图像重建算法。

当矩阵条件数较大时, 求逆矩阵计算精度不高。为避免对  $(S^T S + \mu I)$  直接求其逆矩阵可采用先对其求 QR 分解然后再进行求解。

基于 QR 分解的图像重建算法是利用经过正则化后对  $(S^T S + \mu I)$  进行 QR 分解, 求出初始图像灰度值的估计值, 再根据正问题计算出初始图像的电容值, 将计算电容值和实际测量值相比较得出 1 个电容偏差值, 再利用 QR 分解的方法求出相应于电容偏差值的偏差图像, 然后进行修正。

具体实现过程如下: 如前所述, 经 Tikhonov 正则化后可得到:

$$(S^T S + \mu I)G = S^T C \quad (8)$$

因为  $(S^T S + \mu I)$  是一个  $(1\ 780 \times 1\ 780)$  方阵, 所以可以进行 QR 分解, 即把它分解为 1 个正交矩阵  $Q$  和 1 个上三角矩阵  $R$  的乘积, 即:  $(S^T S + \mu I) = QR$ 。通过求解可以得到  $G$  的解为:

$$G^{QR} = R^{-1}(Q^{-1} S^T C) \quad (9)$$

根据 QR 分解算法对初始图像进行修正, 可以得到修正后的图像模型为:

$$G = G^{QR} + \beta \Delta G \quad (10)$$

式中,  $G^{QR}$  为基于 QR 分解的初始图像, 即式(9),  $\beta$  为优化修正因子,  $\Delta G$  为偏差图像:

$$\Delta G = R^{-1}(Q^{-1} S^T \nabla C) \quad (11)$$

$$\nabla C = C - S G^{QR} \quad (12)$$

$C$  为由 ECT 正问题模型式(2)得的初始电容值。

求解优化修正因子  $\beta$ <sup>[9]</sup>:

根据 ECT 正问题模型式(2)得修正后电容值为:

$$C_1 = S G = S(G^{QR} + \beta \Delta G) = S[G^{QR} + \beta R^{-1}(Q^{-1} S^T \nabla C)] \quad (13)$$

与初始测量电容值比较得电容值误差向量  $\nabla C_1$ :

$$\nabla C_1 = C - C_1 = C - S[G^{QR} + \beta R^{-1}(Q^{-1} S^T \nabla C)] =$$

$$\nabla C - \beta S R^{-1}(Q^{-1} S^T \nabla C) \quad (14)$$

式中,  $C_1$  为修正后图像测量值, 即为根据正问题计算出的初始图像的电容值。

构造函数  $f$  为:

$$f = \|\nabla C_1\|^2 = \|C - C_1\|^2 \quad (15)$$

由式(14)可知,  $f$  是  $\beta$  的函数, 求  $\beta$  的最优解, 就变成使  $f$  最小的问题, 即求修正因子  $\beta$ , 使得电容值误差向量

的模最小。为此,对  $f$  求导并令其等于零,即:

$$\frac{df}{d\beta} = \frac{d(\|C - C_1\|^2)}{d\beta} = 0 \quad (16)$$

即:

$$2 \frac{\partial [\nabla C - SBR^{-1}(Q^{-1}S^T \nabla C)]^T}{\partial \beta} [\nabla C - SBR^{-1}(Q^{-1}S^T \nabla C)] = 0 \quad (17)$$

经过求解可得到的表达式为:

$$\beta = \frac{(SR^{-1}(Q^{-1}S^T \nabla C))^T \nabla C}{\|SR^{-1}(Q^{-1}S^T \nabla C)\|^2} = \frac{(S\Delta G)^T \nabla C}{\|S\Delta G\|^2} \quad (18)$$

## 2 成像结果分析

对线性反投影(LBP)法<sup>[1]</sup>、迭代法<sup>[4]</sup>、Tikhonov 正则化法、正则化修正算法(ROR)<sup>[9]</sup>和基于 QR 分解的重建算法 5 种图像重建算法的重建图像速率和图像质量进行了比较。成像传感器采用 8 极板结构,校验用管壁的介电常数为 2(满管为 2.5),用尼龙测试棒进行实验测试。

重建图像速率用迭代次数  $die\_num$  表示, $die\_num$  越大则重建时间越长,说明速率越低。由于 LBP 法、正则化法对数据的处理过程是一样的,都属于单步处理,所以  $die\_num=0$ ;而 ROR 法和基于 QR 分解的重建算法的整个数据处理过程是在单步数据处理的基础上增加了 1 步修正过程,相当于迭代 1 次,即  $die\_num=1$ 。

重建图像质量采用目前常用的评价指标占空比<sup>[1-2,4,10]</sup>表示。占空比表示图像面积占整个成像区域面积的百分比,表示为:

$$\text{占空比} = \frac{Area_1}{Area} \% \quad (19)$$

$Area_1$  为高介电常数部分图像面积,  $Area$  为成像区域面积。成像效果图如图 1 所示。表 1 给出了不同图像重建算法所重建图像占空比和重建时间的对比结果。

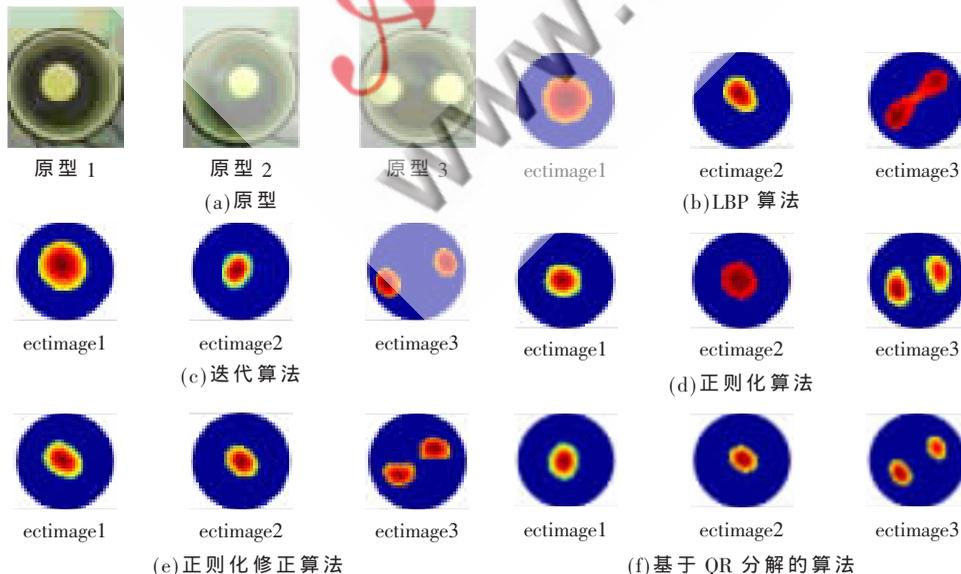


图 1 不同重建算法重建结果比较

表 1 不同图像重建算法所重建图像占空比和重建时间

| 原型             | 原型 1    |         | 原型 2    |         | 原型 3    |         |
|----------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
|                | 占空比/(%) | die_num | 占空比/(%) | die_num | 占空比/(%) | die_num |
| 原型             | 12.9    |         | 6.37    |         | 12.74   |         |
| LBP 算法         | 25.85   | 0       | 12.35   | 0       | 26.35   | 0       |
| 迭代算法           | 24.83   | 15      | 9.83    | 15      | 16.47   | 15      |
| 正则化算法          | 8.30    | 0       | 13.27   | 0       | 20.49   | 0       |
| 正则化修正算法(ROR 法) | 12.84   | 1       | 8.79    | 1       | 12.667  | 1       |
| QR 分解图像重建算法    | 12.69   | 1       | 7.9     | 1       | 12.67   | 1       |

从表 1 可以看出:

(1)LBP 法和正则化法是单步算法,重建图像时间最短即速率最快但是偏离实际原型太大。

(2)迭代算法迭代 10 次之后的结果与 LBP 法和正则化法相比,比较接近实际原型,但是重建时间太长。

(3)从重建图像时间看,ROR 法和 QR 分解图像重建算法仅为迭代法的 1/15,而 QR 分解图像重建算法所重建图像的占空比,比 ROR 法更接近成像原型。

由图 1 可以看出:基于 QR 分解的电容层析成像算法图像重建结果最为接近真实物体,图像质量得到改善。综上成像实验结果表明:基于 QR 分解的图像重建算法图像重建结果与实际原型较接近,优于其他几种算法。

本文在正则化的基础上提出的基于 QR 分解的图像重建算法,通过与当前常用的线性反投影(LBP)法、迭代法、Tikhonov 正则化法和 ROR 法的成像实验对比,从占空比和图像重建时间两方面可以表明,用该算法得到的图像具有比较好的图像重建质量和较高的成像速率。

参考文献

- [1] XIE C G, HUANG S M. Electrical capacitance tomography for flow imaging—system model for development of image reconstruction algorithms and design of primary sensors[J]. IEEE Proc. G. 1992, 139(1):89-98.
- [2] XIE C G, BECK M S. 8-electrode capacitance system for two-component flow identification, Part 1;tomographic flow imaging [J]. IEEE Proc. A, 1989, 136(4):173-183.
- [3] ISAKSEN O. A review of reconstruction techniques for capacitance tomography [J]. Meas. Sci. Technol. 1996(7):325-337.
- [4] YANG W Q, SPINK D M, YORK T A, et al. An image-reconstruction algorithm based on land weber's Iteration method for electrical -capacitance tomography[J]. Meas. Sci. Technol. 1999(10):106-1069.

- [5] KUHNERT F. 广义逆矩阵与正则化方法[M]. 陈杰, 译. 北京: 高等教育出版社, 1984.
- [6] TIKHONOV A N, ARSENIN V Y. Solution of Ill-posed problems[C]. New York: John Wiley, 1977.
- [7] 王延平. 信号复原与重建[M]. 南京: 东南大学出版社, 1992.
- [8] 刘会灯, 朱飞. MATLAB 编程基础与典型应用[M]. 北京: 人民邮电出版社, 2008.
- [9] 赵进创. 正则化优化修正的电容层析成像图像重建算法[J]. 仪器仪表学报, 2004, 25(1):1-4.
- [10] TAPP H S, KEMSLEY E K. Image improvement in soft-field tomography through the use of chemometrics[J]. Meas. Sci. Technol., 1998(9):592-598.

(收稿日期: 2009-12-14)

作者简介:

刘传美, 女, 硕士研究生, 主要研究方向: 电容层析成像技术软件设计。

