

# 时滞双线性系统的最优跟踪控制\*

赵艳东, 葛素楠

(青岛科技大学 自动化与电子工程学院, 山东 青岛 266042)

**摘要:** 研究带有时滞项的双线性系统的最优跟踪控制, 依据求解规律转化成两点边值问题。通过采用迭代逐次逼近法, 能够得到收敛与原系统最优控制律的序列。由于控制律含有外系统变量导致控制律物理不可实现, 则采用状态重构解决这一问题。仿真结果表明该方法对解决这类问题有较好的鲁棒性及快速性。

**关键词:** 时滞; 双线性系统; 最优跟踪控制; 两点边值问题; 状态重构

中图分类号: TP13

文献标识码: A

## Optimal output tracking control for bilinear time-delay systems

ZHAO Yan Dong, GE Su Nan

(College of Automation and Electronic Engineering, Qingdao University of Science and Technology, Qingdao 266042, China)

**Abstract:** The optimal output tracking control for time-delay bilinear system is researched. In accordance with the laws of optimal tracking control, the system is converted into two-point boundary value problem. By using a successive approximation approach, we obtain vector sequence which converges at the law of original system. Because the control law includes the state variable of the exosystem, the law can not be realized physically. It is solved via state reconstruction. The simulation results show that this approach possesses better robustness and speediness.

**Key words:** time-delay; bilinear systems; optimal output tracking control; TPBV problem; state reconstruction

跟踪问题的主要目标是抑制外部扰动对系统性能的影响并使系统输出无静差跟踪外部参考输入。目前, 对于线性系统的跟踪问题研究比较成熟, 许多学者致力于研究非线性系统的跟踪问题<sup>[1-2]</sup>。而双线性系统是一类比较特殊的非线性系统, 其数学模型的非线性部分通常为系统的状态和输入的二次型函数或者双线性函数<sup>[3]</sup>。对于这种非线性系统, 有学者将非线性过程进行精确反馈线性化<sup>[4-5]</sup>, 然后再对系统进行线性求解。但线性化的过程往往比较复杂, 且运算过程需要消耗大量的时间, 并且得到的线性系统与原来非线性相比误差较大, 鲁棒性也没有预期的好, 反而造成系统新的不稳定性。

对于最优跟踪问题, 主要采用数值方法, 例如: 幂级数近似法<sup>[6]</sup>、Galerkin 逐次逼近法<sup>[7]</sup>、利用逐次求解一个基于状态的 Riccati 方程来求得最优解的迭代算法<sup>[8-9]</sup>和 Riccati 方程近似序列的方法<sup>[10]</sup>。但这些方法需要进行矩阵微分方程求解, 导致计算量大大增加。

本文利用一种迭代求解的逐次逼近法, 致力解决带有时滞项的双线性系统最优跟踪问题。依据最优跟踪控制求解规律将系统转化成两点边值问题, 同时不需要通过求解 Riccati 方程或 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程<sup>[6-9]</sup>得出控制律, 而是将两点边值问题转化为无穷的序列, 通过截取近似的控制序列求出次优控制律, 并针对控制律的物理不可实现性这一问题, 设计了降维观测器进行解决。通过仿真结果, 可以看出此方法的有效性。

### 1 最优跟踪问题

已知带有时滞项的双线性系统如下:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_1 x(t-\tau) + Bu(t) + \{x(t)N\}u(t), t \in (0, \infty) \\ x(t) = \phi(t), t \in [-\tau, 0] \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1)$$

式(1)中,  $x \in R^n$  为状态向量,  $u \in R^m$  为控制向量,  $y \in R^l$  为输出向量。A、A<sub>1</sub>、C 和 B 分别为相应维数的系数矩

\* 基金项目: 青岛科技大学博士基金资助(0022247)

## 技术与方法 Technique and Method

阵,并 $\{x(t)N\} = \sum_{i=1}^n x_i(t)N_i$ ,  $N_i$ 为适当维数的常量矩阵。

$$N_i = [(N_1^i)^T, (N_2^i)^T, \dots, (N_n^i)^T]^T, i=1, 2, \dots, n \quad (2)$$

其中 $N_i^j \in R^{1 \times m}$ ,  $i, j=1, 2, \dots, n$ , 令 $f(x, u) = \{x(t)N\}u(t)$ , 且关于变量 $x$ 满足 Lipschitz 条件。定义无限时域的二次性能指标为:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} [e^T(t)Qe(t) + u^T(t)Ru(t)] dt \quad (3)$$

其中 $Q \in R^{n \times n}$ ,  $R \in R^{m \times m}$ , 且都是正定矩阵。

设系统式(1)的输出 $y$ 跟踪参考输入的期望轨线 $\tilde{y}$ , 并由如下稳定的外系统确定:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Kz(t) \\ \tilde{y}(t) = Hz(t) \end{cases} \quad (4)$$

且 $z \in R^r$ ,  $\tilde{y} \in R^r$ ,  $K$ 和 $H$ 为相应维数的常量矩阵。假设 $(A, B)$ 为完全能控,  $(A, C)$ 为完全能观测, 即 $(K, H)$ 为完全能观测。则输出误差为:

$$e(t) = \tilde{y}(t) - y(t) \quad (5)$$

根据系统最优跟踪控制的求解规律, 系统式(1)依据二次性能指标式(3), 得出了最优跟踪控制中的两点边值问题, 如下:

$$\begin{cases} -\dot{\lambda}(t) = C^T Q C x(t) - C^T Q H z(t) + A^T \lambda(t) + A_1^T \lambda(t + \tau) + F(t) \lambda(t) \\ \dot{x}(t) = A x(t) + A_1 x(t - \tau) + B u(t) + \{x(t)N\}u(t), t \in (0, \infty) \\ \lambda(\infty) = 0 \\ x(t) = \phi(t), t \in [-\tau, 0] \end{cases} \quad (6)$$

其中:

$$F(t) = \begin{bmatrix} N_1^1 u(t) & N_2^1 u(t) & \dots & N_n^1 u(t) \\ N_1^2 u(t) & N_2^2 u(t) & \dots & N_n^2 u(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_1^n u(t) & N_2^n u(t) & \dots & N_n^n u(t) \end{bmatrix} \quad (7)$$

此时系统的最优跟踪控制律为:

$$u^*(t) = -R^{-1} [B + \{x(t)N\}]^T \lambda(t) \quad (8)$$

通过对式(6)进行分析, 发现式中既含有时滞项又含有超前项, 并且存在双线性项, 这时 $\lambda(t)$ 和 $x(t)$ 相互耦合, 对于这类问题采用求解迭代的向量微分方程来解决这个问题。

## 2 最优跟踪控制器的设计

引入式(5)来构造带有两点边值问题的族:

$$\begin{cases} -\dot{\lambda}_k(t) = C^T Q C x_k(t) - C^T Q H z(t) + A^T \lambda_k(t) + A_1^T \lambda_{k-1}(t + \tau) + F_{k-1}(t) \lambda_k(t) \\ \dot{x}_k(t) = A x_k(t) + A_1 x_{k-1}(t - \tau) - (B + \{x_{k-1}(t)N\}) \\ R^{-1} (B + \{x_{k-1}(t)N\})^T \lambda_k(t) \\ u_k^*(t) = -R^{-1} [B + \{x_{k-1}(t)N\}]^T \lambda_k(t), t \in (0, \infty) \end{cases} \quad (9)$$

边界条件为:

$$\begin{cases} \lambda_k(\infty) = 0 \\ x_k(t) = \phi(t), t \in [-\tau, 0], k=1, 2, \dots; \end{cases} \quad (10)$$

同时令 $x_0(t) \equiv 0, \lambda_0(t) \equiv 0$ , 根据迭代法, 可以解出

系统式(9)的控制律序列。即 $\{u_k^*(t)\}$ 为:

$$u_k^*(t) = -R^{-1} [B + \{x_{k-1}(t)N\}]^T [P_1 x_k(t) + P_2 z(t) + g_k(t)], k=1, 2, \dots; \quad (11)$$

其中伴随向量序列 $g_k(t)$ 可以通过如下方程确定:

$$\begin{cases} -\dot{g}_k(t) = P_1 A_1 x_{k-1}(t - \tau) + [A^T - P_1 S] g_k(t) + A_1^T [P_1 x_{k-1}(t + \tau) + P_2 z(t + \tau) + g_{k-1}(t + \tau)] - [P_1 B R^{-1} \{x_{k-1}(t)N\}^T + P_1 \{x_{k-1}(t)N\} R^{-1} (B + \{x_{k-1}(t)N\})^T - F_{k-1}(t)] [P_1 x_k(t) + P_2 z(t) + g_k(t)], t \in (0, \infty), k=1, 2, \dots; \end{cases} \quad (12)$$

对于最优跟踪控制律序列 $\{u_k^*(t)\}$ 当中的序列 $x_k(t)$ , 可以通过如下序列方程得出:

$$\begin{cases} x_0(t) \equiv 0 \\ \dot{x}_k(t) = A x_k(t) + A_1 x_{k-1}(t - \tau) - (B + \{x_{k-1}(t)N\}) \\ R^{-1} (B + \{x_{k-1}(t)N\})^T [P_1 x_k(t) + P_2 z(t) + g_k(t)] \\ x_k(t) = \phi(t), t \in [-\tau, 0], k=1, 2, \dots; \end{cases} \quad (13)$$

其中 $S = B R^{-1} B^T$ ,  $F(t)$ 的迭代形式如下:

$$F_{k-1}(t) = \begin{bmatrix} N_1^1 u_{k-1}(t) & \dots & N_n^1 u_{k-1}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_1^n u_{k-1}(t) & \dots & N_n^n u_{k-1}(t) \end{bmatrix} \quad (14)$$

对于未知矩阵 $P_1, P_2$ 分别为下列矩阵方程的解:

$$\begin{cases} P_1 A - P_1 S P_1 + C^T Q C + A^T P_1 = 0 \\ P_2 K - P_1 S P_2 + C^T Q H + A^T P_2 = 0 \end{cases} \quad (15)$$

定理 1 系统式(9)的最优控制律序列 $\{u_k^*(t)\}$ , 一致收敛于系统式(1)在性能指标式(3)约束下的最优跟踪控制律。则系统式(1)的最优跟踪控制律为:

$$u^*(t) = -R^{-1} [B + \{x(t)N\}]^T [P_1 x(t) + P_2 z(t) + \lim_{k \rightarrow \infty} g_k(t)] \quad (16)$$

证明 设:

$$\lambda(t) = P_1 x(t) + P_2 z(t) + g(t) \quad (17)$$

其中 $g(t) \in R^n$ 为待求的伴随向量,  $P_1, P_2$ 为未知常量矩

## 技术与方法 Technique and Method

阵,对式(17)两边分别求导可得出:

$$\dot{\lambda}(t) = P_1 \dot{x}(t) + P_2 \dot{z}(t) + \dot{g}(t) \quad (18)$$

把系统式(1)和稳定的外系统式(4)代入到式(18),与式(6)相结合,得到伴随向量的导数的形式:

$$\begin{aligned} -\dot{g}(t) = & P_1 A_1 x(t-\tau) + [A^T - P_1 S]g(t) + A_1 [P_1 x(t+\tau) + \\ & P_2 z(t+\tau) + g(t+\tau)] - [P_1 B R^{-1} \{x(t)N\}^T + \\ & P_1 \{x(t)N\} R^{-1} (B + \{x(t)N\})^T - F(t)] [P_1 x(t) + \\ & P_2 z(t) + g(t)] \end{aligned} \quad (19)$$

同时得出:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_1 x(t-\tau) - (B + \{x(t)N\}) \\ \quad R^{-1} (B + \{x(t)N\})^T [P_1 x_k(t) + P_2 z(t) + g(t)] \\ x_k(t) = \phi(t), t \in [-\tau, 0] \end{cases} \quad (20)$$

从而也得出最优控制律:

$$u^*(t) = -R^{-1} [B + \{x(t)N\}]^T [P_1 x(t) + P_2 z(t) + g(t)] \quad (21)$$

在式(21)最优控制律当中,含有两个常量矩阵  $P_1$ 、 $P_2$ ,这两个矩阵量可以通过式(15)得到。这时将式(19)和式(20)构造成序列式(12)和式(13),通过迭代逐次逼近法分别解出序列式(12)和式(13),进一步解出最优控制律  $u^*(t)$  的序列,即式(11)。

对于第  $k$  次优化问题,最优状态轨线和最优跟踪控制律分别为  $x_k(t)$  和  $u_k(t)$ 。令  $\{x_k(t)\}$  和  $\{g_k(t)\}$  为 Cauchy 序列,由参考文献[11]中的引理 1 可知,  $\{g_k(t)\}$  和  $\{x_k(t)\}$  一致收敛于式(19)和式(20)的解,即:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(t) = g(t), \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t) = x(t) \quad (22)$$

由于控制序列  $\{u_k^*(t)\}$  仅与  $\{x_k(t)\}$  和  $\{g_k(t)\}$  相关,即得到最优控制律为式(11),证明完毕。

注 1 在实际系统最优控制律的设计中,  $g_\infty(t)$  不可能求出。通常,求解序列式(13)的前  $M$  个解来近似其精确解,这样便得到系统式(1)的第  $M$  阶次优控制律:

$$u_M^*(t) = -R^{-1} [B + \{x(t)N\}]^T [P_1 x(t) + P_2 z(t) + g_M(t)] \quad (23)$$

对于式(23)中  $x(t)$  是精确解,相比式(11)的序列解要精确的多,效果更好。同时,对于具体系统  $M$  的选取可以根据一定的误差标准确定。下面给出这种求解的算法:

(1)由式(4)求出期望输出  $\hat{y}(t)$ ;并依据式(15)求出  $P_1$  和  $P_2$ ;给定  $\sigma > 0$ ;且令  $J_0 = \infty, k=1, g_0(t) = 0$ 。

(2)由式(12)求出  $g_k(t)$ 、式(13)求出  $x_k(t)$ ,并代入到式(23),根据其收敛性,求出  $u_M^*(t)$ 。接着根据系统式(1)、式(5)求出  $e(t)$ 。

(3)令  $M=k$ ,将式(3)转化为:

$$J_M = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} [e^T(t) Q e(t) + u_M^T(t) R u_M(t)] dt \quad (24)$$

《微型机与应用》2010年第7期

此时求出  $J_M$ 。

(4)如果当

$$|(J_{M-1} - J_M)/J_{M-1}| < \sigma \quad (25)$$

将第  $M$  次的  $g_M$  带入到式(23)中,即可得到系统的次优控制律。

### 3 降维观测器的设计

由于控制律含有外系统变量,从而控制律物理不可实现。为了解决这个问题,需要对外系统的状态进行重构。

因为  $rank H = r$ , 并且  $(K, H)$  完全可观测,从而存在一个常量矩阵  $W \in R^{(p-r) \times p}$ ,使得  $T = [H^T W^T]^T \in R^{p \times p}$  为非奇异矩阵,即矩阵的逆为  $T^{-1} = [G_1 G_2]$ ,且  $G_1 \in R^{p \times r}, G_2 \in R^{p \times (p-r)}$ 。对  $z$  进行非奇异变化,得到  $\bar{z} = [\bar{z}_1^T \bar{z}_2^T]^T = Tz$ ,其中  $\bar{z}_1 \in R^r, \bar{z}_2 \in R^{p-r}$ 。这时外系统可表示为

$$\begin{cases} \dot{\bar{z}}_1 = \bar{K}_{11} \bar{z}_1(t) + \bar{K}_{12} \bar{z}_2(t) \\ \dot{\bar{z}}_2 = \bar{K}_{21} \bar{z}_1(t) + \bar{K}_{22} \bar{z}_2(t) \\ \hat{y}(t) = \bar{z}_1(t) \end{cases} \quad (26)$$

$\bar{K}_{11}, \bar{K}_{12}, \bar{K}_{21}, \bar{K}_{22}$  为相应维数的矩阵,并且:

$$TKT^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} \\ \bar{K}_{21} & \bar{K}_{22} \end{bmatrix} \quad (27)$$

通过变换,其分状态  $\bar{z}_1$  为外系统的输出  $\hat{y}(t)$ 。因此,要重构  $z$  状态中的分状态  $\bar{z}_2$ ,构造降维观测器。

$$\begin{cases} \dot{v}(t) = \hat{K} v(t) + \hat{L} \hat{y}(t) \\ \hat{z}_2(t) = v(t) + \hat{L} \hat{y}(t) \end{cases} \quad (28)$$

其中:

$$\begin{cases} \hat{L} = \bar{K}_{22} \bar{L} - \bar{L} \bar{K}_{12} \bar{L} + \bar{K}_{21} - \bar{L} \bar{K}_{11} \\ \hat{K} = (\bar{K}_{22} - \bar{L} \bar{K}_{12}) \end{cases} \quad (29)$$

式(28)中的  $v$  为观测器的  $(p-r)$  维状态向量,  $\hat{z}_2$  为  $\bar{z}_2$  的观测值,  $\bar{L}$  为观测器矩阵。从而可以通过选取  $\bar{L}$  来任意配置  $\hat{K}$  的全部特征值,并保证  $\hat{z}_2(t)$  能够按规定的指数衰减率趋近于  $\bar{z}_2(t)$ 。外系统的状态观测器输出可以表示为:

$$\hat{z}(t) = G_1 v(t) + (G_1 + G_2 \bar{L}) \hat{y}(t) \quad (30)$$

从而得到基于观测器的动态跟踪控制律:

$$u_N(t) = -R^{-1} [B + \{x(t)N\}]^T [P_1 x(t) + P_2 G_1 v(t) +$$

$$P_2 (G_1 + G_2 \bar{L}) \hat{y}(t) + g_N(t)] \quad (31)$$

注 2 由于控制式(30)含有参考输入观测器,且观测器的系数矩阵  $\hat{K}$  是按极点要求选取的,所以这个控制律

欢迎网上投稿 www.pcachina.com 85

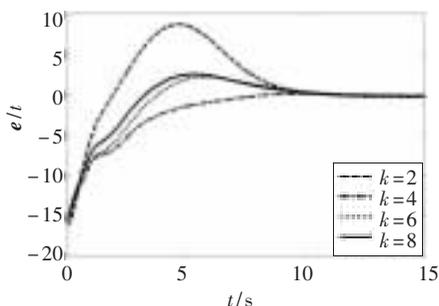
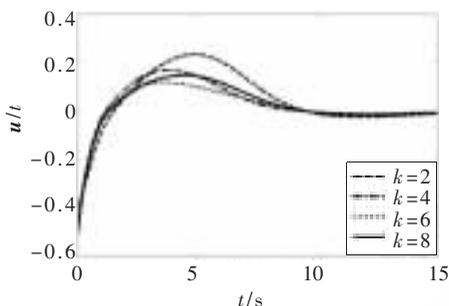
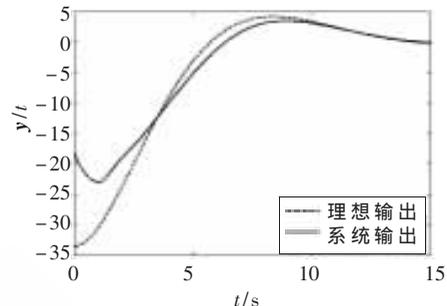
图1 当  $k=2, 4, 6, 8$  时的系统输出误差  $e(t)$  仿真曲线图2 当  $k=2, 4, 6, 8$  时的系统控制变量  $u(t)$  仿真曲线

图3 系统输出变量曲线

不是最优或次优控制律, 如果选择适当系数矩阵  $\hat{K}$ , 可以使控制律式(30)的控制效果接近次优控制律。

#### 4 仿真

考虑由式(1)描述的系统, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4.5 \\ 5 \end{bmatrix}, C = [10 \ 20]$$

$$A1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.6 & -0.2 \end{bmatrix}, N1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix}, \quad (32)$$

$$N2 = \begin{bmatrix} -1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

根据参考输入有外系统式(4)描述, 各参数应为:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0.2 & -0.5 \end{bmatrix}, H = [-150 \ -200], z_0 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (33)$$

系统的性能指标参数应为:

$$Q = 0.01, R = 20 \quad (34)$$

选取控制精度  $\varepsilon = 0.02$ , 表1给出了迭代次数分别为  $k=2, 3, 4, 6, 9, 10$  系统的性能指标, 得知  $|(J_{10} - J_9)/J_9| < \varepsilon$ , 当  $k=10$  满足精度要求, 从而  $u_{10}$  可作为系统的近似最优输出跟踪控制律。图1、图2给出了当  $k=2, 4, 6, 8$  时的系统输出误差  $e(t)$  和控制变量  $u(t)$  的仿真曲线, 可以看出随着  $k$  的取值越大, 得出的最优输出跟踪控制律越理想, 误差也越来越小。图3给出了系统输出的仿真曲线。

表1 当  $k=2, 3, 4, 6, 9, 10$  时的性能指标的值

$k$	2	3	4	6	9	10
$J_k$	4.513 7	3.710 1	2.759 2	2.258 2	2.439 7	2.413 3

本文对这一类带有时滞项的双线性系统进行研究, 讨论了在无限时间二次型性能指标下的最优输出跟踪控制问题, 利用了一种迭代逐次逼近法来解决出现的非线性两点边值问题。并引入了参考输入观测器来解决控制律的物理不可实现性。这种方法计算量小、容易实现。通过仿真结果可以看出这种方法的可行性。

#### 参考文献

[1] GRABBE M T, DAWSON D M. Application of optimal control theory to the trajectory tracking of rigid robot manipulators [J]. Optimal Control Applications and Methods, 1994, 15(4):237-249.

- [2] GARRARD W L, ENNS D F, SNELL S A. Nonlinear feedback control of highly manoeuvrable aircraft [J]. Int J Control, 1992, 56(4):799-812.
- [3] TANG G Y, MA H, ZHANG B L. Successive-approximation approach of optimal control for bilinear discrete-time systems[J]. IEE Proceedings of Control Theory and Applications, 2005, 152(6):636-644.
- [4] ZHANG Z H, WANG S Q, RONG G. Predictive function control based on global feedback linearization for MIMO bilinear system [J]. Control Theory & Applications, 2003, 20(3):477-480.
- [5] LIU R M, LIN J J, YU J S. A new method of robust control of bilinear system by state feedback [J]. Journal of East China University of Science and Technology, 2000, 26(5): 499-501.
- [6] BEARD R W, SARIDIS G N, WEN J T. Galerkin approximations of the generalized hamilton-jacobi-bellman equation[J]. Automatica, 1997, 33(12):2159-2177.
- [7] HARRISON R F. Asymptotically optimal stabilising quadratic control of an inverted pendulum [J]. IEE Proceedings: Control Theory and Applications, 2003, 150(1):7-16.
- [8] MCCAFFREY D, BANKS S P. Lagrangian manifolds and asymptotically optimal stabilizing feedback control [J]. Systems and Control Letters, 2001, 43(3):219-224.
- [9] CIMEN T, BANKS S P. Nonlinear optimal tracking control with application to super-tankers for autopilot design [J]. Automatica, 2004, 40(11):1845-1863.
- [10] TANG G Y. Suboptimal control for nonlinear systems: a successive approximation approach[J]. Systems and Control Letters, 2005, 54(5):429-434.

(收稿日期: 2009-09-04)

#### 作者简介:

赵艳东, 女, 1976年生, 博士, 副教授, 主要研究方向: 控制理论与应用、计算机控制等研究。

葛素楠, 女, 1984年生, 硕士研究生, 主要研究方向: 控制理论与应用、计算机控制等研究。