

基于改进型 UMP BP-Based 算法的 LDPC 译码研究

张天瑜

(无锡市广播电视大学 机电工程系, 江苏 无锡 214011)

摘要: 为了弥补 UMP BP-Based 译码算法相对于 LLR BP 译码算法的性能缺陷, 提出一种改进型 UMP BP-Based 译码算法。该算法中的参数是在最小均方误差准则下确定的, 对所有的 LDPC 码的译码具有通用性。仿真结果表明, 在相同误码率的情况下, 改进型 UMP BP-Based 译码算法比 UMP BP-Based 译码算法、Normalized BP-Based 译码算法以及 Offset BP-Based 译码算法具有更好的 LDPC 译码性能。

关键词: LDPC 码; Tanner 图; 最小均方误差; LLR BP 译码算法; 改进型 UMP BP-Based 译码算法
中图分类号: TN911.22 文献标识码: A

Research on LDPC decoding based on modified UMP BP-Based algorithm

ZHANG Tian Yu

(Department of Mechanical and Electrical Engineering, Wuxi Radio & Television University, Wuxi 214011, China)

Abstract: In order to make up for the performance defects of UMP BP-Based decoding algorithm relative to LLR BP decoding algorithm, a modified UMP BP-Based decoding algorithm is proposed. Parameters of the proposed algorithm are confirmed according to minimum mean square error rule and it has the generality for decoding of all LDPC codes. The simulation results show that the LDPC decoding performance of modified UMP BP-Based decoding algorithm is more effective than that of UMP BP-Based decoding algorithm, Normalized BP-Based decoding algorithm and Offset BP-Based decoding algorithm under the same condition of bit error rate.

Key words: LDPC codes; Tanner graph; minimum mean square error; LLR BP decoding algorithm; modified UMP BP-Based decoding algorithm

在研究 Turbo 码的译码过程中, MacKay、Neal 和 Wiberg 等人发现 Gallager 早在 1962 年提出的低密度校验 LDPC (Low-Density Parity-Check) 码是一种性能卓越具有渐进特性的非常好码, 在加性高斯白噪声 AWGN (Additive White Gaussian Noise) 信道下的译码性能可以逼近 Shannon 信道容量的极限。由于 LDPC 码的校验矩阵为稀疏矩阵, 实现译码的复杂度比 Turbo 码要低, 在中长码长时的译码性能超过 Turbo 码, 能够实现并行译码以及具有译码错误可检测的特点, 并且比 Turbo 码更适用于高速无线数据业务, 因此已逐渐被 IEEE802.3an、IEEE 802.16e 等标准所采纳。目前在海外 LDPC 码在下一代卫星数字视频广播标准 DVB-S2 (Digital Video Broadcasting-Satellite Second Generation) 以及下一代移动通信 LTE 中得到了广泛的应用。在国内, 中国移动多媒体广

播 CMMB (China Mobile Multimedia Broadcasting) 的信道编码技术的一个亮点就是采用了 LDPC 编码方案^[1-7]。本文提出一种改进型 UMP BP-Based 译码算法, 利用最小均方误差准则来计算该算法中的参数, 能够在一定程度上弥补 UMP BP-Based 译码算法的性能缺陷。

1 LDPC 码简介

LDPC 码一般是用 Tanner 图来表示, Tanner 图中的变量节点和校验节点对应于 LDPC 码校验矩阵 H 的列和行, Tanner 图中的连线对应于 LDPC 码校验矩阵 H 的非零元素。校验矩阵 H 中每行非零元素的个数称为行重, 每列非零元素的个数称为列重, 所有行重相等并且所有列重也相等的码称为规则 LDPC 码; 否则, 称为非规则 LDPC 码。设 LDPC 码的校验矩阵为 H 如式(1)所示。根据 H 矩阵得到与之对应的 Tanner 图, 如图 1 所

示。图中 $C_1 \sim C_6$ 表示校验节点, $B_1 \sim B_9$ 表示变量节点。

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

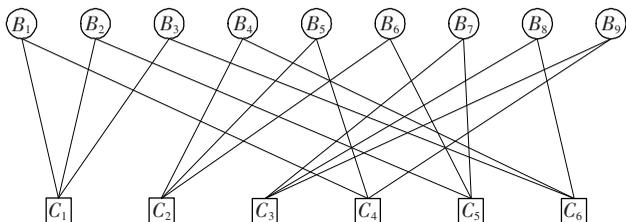


图1 H 矩阵对应的 Tanner 图

由于非规则 LDPC 码的行重和列重不相等, 因此在其对应的 Tanner 图中变量节点和校验节点的度数也就不完全相等, 非规则 LDPC 码的译码性能较规则 LDPC 码的译码性能要高。这里节点的度数是指与该节点相连接的边的条数。为了表示非规则 LDPC 码, 分别用序列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d)$ 和 $\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_d)$ 表示变量节点和校验节点的边次数分布, 其中, λ_i 和 ρ_i 分别表示 Tanner 图中度数为 i 的变量节点和校验节点的边数在总边数中所占的比例, 这里的下标 d_v 和 d_c 分别表示变量节点和校验节点的最大度数。非规则 LDPC 码的变量节点和校验节点的边次数分布除了用上述的序列表示之外, 还可以表示为:

$$\begin{cases} \lambda(x) = \sum_{i=1}^{d_v} \lambda_i x^{i-1} \\ \rho(x) = \sum_{j=1}^{d_c} \rho_j x^{j-1} \end{cases} \quad (2)$$

类似地, 非规则 LDPC 码中变量节点的节点度数分布 $\hat{\lambda}_i$ 和校验节点的节点度数分布 $\hat{\rho}_i$ 可表示为:

$$\begin{cases} \hat{\lambda}_i = \frac{\lambda_i}{i \int_0^1 \lambda(x) dx} \\ \hat{\rho}_i = \frac{\rho_i}{i \int_0^1 \rho(x) dx} \end{cases} \quad (3)$$

2 UMP BP-Based 译码算法

UMP BP-Based 译码算法和 LLR BP 译码算法的原理是相同的, 都是通过迭代计算出校验节点和变量节点之间传递的信息, 然后根据这些信息进行判决^[8-12]。基于 H 矩阵的 UMP BP-Based 译码算法的原理图如图 2 所示。

设编码器的输出码字为 $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, 通过二进制相移键控 BPSK (Binary Phase Shift Keying) 调制后变

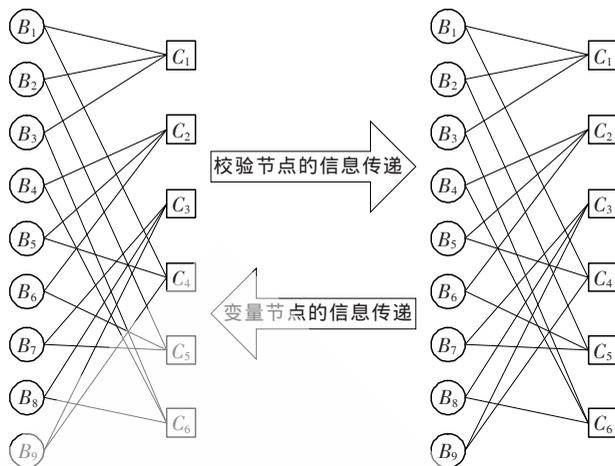


图2 基于 H 矩阵的 UMP BP-Based 译码算法的原理图

为 $x_i = 2c_i - 1$, 经过 AWGN 信道, 译码器的输入序列为 $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$, 其中, $r_i = 2c_i - 1 + n_i$, n_i 为均值为 0、方差为 σ^2 的高斯白噪声。设 $N(m) = \{n | H_{mn} = 1\}$ 为所有与校验节点 C_m 相连的变量节点; $M(n) = \{m | H_{mn} = 1\}$ 为所有与变量节点 B_n 相连的校验节点; $N(m) \setminus n$ 表示 $N(m)$ 中除去变量节点 B_n 所剩下的变量节点的集合; $M(n) \setminus m$ 表示 $M(n)$ 除去校验节点 C_m 所剩下的校验节点的集合; $q_{ij}(b)$, $b = 0, 1$ 表示变量节点 i 传递给校验节点 j 的外部概率信息; $r_{ji}(b)$, $b = 0, 1$ 表示校验节点 j 传递给变量节点 i 的外部概率信息。UMP BP-Based 译码算法的具体步骤如下:

(1) 初始化

计算信道传递给变量节点的初始概率似然比信息 $L(P_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ 。对于变量节点 i 以及与其相邻的校验节点 $j \in M(i)$ 而言, 在 AWGN 信道中得到变量节点传递给校验节点的初始信息为:

$$L^{(0)}(q_{ij}) = L(P_i) = \ln \frac{1 + \exp(\frac{2r_i}{\sigma})}{1 + \exp(-\frac{2r_i}{\sigma})} = \ln \frac{\exp(\frac{r_i}{\sigma}) [\exp(\frac{r_i}{\sigma}) + \exp(-\frac{r_i}{\sigma})]}{\exp(-\frac{r_i}{\sigma}) [\exp(\frac{r_i}{\sigma}) + \exp(-\frac{r_i}{\sigma})]} = \ln \exp(\frac{2r_i}{\sigma}) = \frac{2r_i}{\sigma} \quad (4)$$

(2) 节点信息的迭代处理

① 校验节点的信息传递

对所有的校验节点 j 以及与其相邻的变量节点 $i \in N(j)$, 在第 k 次迭代中, 变量节点传递给校验节点的信息为:

$$L^{(k)}(r_{ji}) = \prod_{i' \in N(j) \setminus i} \text{sign}[L^{(k-1)}(q_{ij'})] \min_{i' \in N(j) \setminus i} [L^{(k-1)}(q_{ij'})] \quad (5)$$

② 变量节点的信息传递

对所有的变量节点 i 以及与其相邻的校验节点 $j \in M(i)$, 在第 k 次迭代中, 校验节点传递给变量节点的信息为:

$$L^{(k)}(q_{ij}) = L(P_i) + \sum_{j' \in N(i) \setminus j} L^{(k)}(r_{j'i}) \quad (6)$$

(3) 判决译码

对所有的变量节点计算判决信息:

$$L^{(k)}(q_i) = L(P_i) + \sum_{j \in M(i)} L^{(k)}(r_{ji}) \quad (7)$$

$$\hat{c}_i = \begin{cases} 0 & L^{(k)}(q_i) > 0 \\ 1 & L^{(k)}(q_i) \leq 0 \end{cases} \quad (8)$$

(4) 停止

判断 $H\hat{c}^T = 0$ 是否成立, 若成立, 停止迭代, 译码输出 \hat{c} ; 否则, 返回(1)进行下一次迭代, 直至达到最大迭代次数。

3 改进型 UMP BP-Based 译码算法

在 LLR BP 译码算法中, 变量节点传递给校验节点的信息为:

$$L^{(k)}(r_{ji}) = 2 \operatorname{arc} \tanh \left\{ \prod_{i' \in N(j) \setminus i} \tanh \left[\frac{1}{2} L^{(k-1)}(q_{i'j}) \right] \right\} \quad (9)$$

由于 $\tanh(x)$ 和 $\operatorname{arc} \tanh(x)$ 都是奇函数, $\tanh(|x|)$ 关于 $|x|$ 单调递减, 并且满足条件 $0 \leq \tanh(|x|) = \frac{e^{|x|} - e^{-|x|}}{e^{|x|} + e^{-|x|}} \leq 1$,

所以式(9)可以近似化简为:

$$\begin{aligned} L^{(k)}(r_{ji}) &= 2 \operatorname{arc} \tanh \left\{ \prod_{i' \in N(j) \setminus i} \operatorname{sign}[L^{(k-1)}(q_{i'j})] \cdot \right. \\ &\quad \left. \prod_{i' \in N(j) \setminus i} \tanh \left[\frac{1}{2} |L^{(k-1)}(q_{i'j})| \right] \right\} = 2 \prod_{i' \in N(j) \setminus i} \operatorname{sign}[L^{(k-1)}(q_{i'j})] \cdot \\ &\quad \operatorname{arc} \tanh \left\{ \prod_{i' \in N(j) \setminus i} \tanh \left[\frac{1}{2} |L^{(k-1)}(q_{i'j})| \right] \right\} \\ &\approx 2 \prod_{i' \in N(j) \setminus i} \operatorname{sign}[L^{(k-1)}(q_{i'j})] \operatorname{arc} \tanh \left\{ \min_{i' \in N(j) \setminus i} \tanh \left[\frac{1}{2} |L^{(k-1)}(q_{i'j})| \right] \right\} \\ &= 2 \prod_{i' \in N(j) \setminus i} \operatorname{sign}[L^{(k-1)}(q_{i'j})] \min_{i' \in N(j) \setminus i} \left\{ \operatorname{arc} \tanh \left[\frac{1}{2} |L^{(k-1)}(q_{i'j})| \right] \right\} \\ &= \prod_{i' \in N(j) \setminus i} \operatorname{sign}[L^{(k-1)}(q_{i'j})] \min_{i' \in N(j) \setminus i} |L^{(k-1)}(q_{i'j})| \quad (10) \end{aligned}$$

这样就得到式(5)所描述的 UMP BP-Based 译码算法。由于是利用式(10)来近似代替式(9), 本文可以大大简化运算, 但是两者之间的误差将导致译码性能有所下降。为了减少这种误差, 通常采用 Normalized BP-Based 译码算法和 Offset BP-Based 译码算法。Normalized BP-Based 译码算法是通过引入归一化因子来减小误差, 而 Offset BP-Based 译码算法是通过引入偏移因子来减小误差。这两种译码算法虽然能在一定程度上减小了误差, 但是误差减小的程度有限, 并且引入的因子只能通

过仿真确定, 具有偶然性。

本文提出一种改进型 UMP BP-Based 算法, 利用最小均方误差准则, 通过引入参数 α, β, γ 使得校验节点的信息的均方误差最小。为了叙述方便, 将式(5)记为 L_2 , 式(9)记为 L_1 , 改进型 UMP BP-Based 算法中校验节点的信息记为 L_3 。这里用含有 L_2 的表达式来表示 L_3 , 即设定 $|L_3| = \alpha + \beta |L_2| + \gamma |L_2|^2$, 通过改变参数 α, β, γ , 使得 $|L_3|$ 和 $|L_1|$ 的均方误差最小。设 $g(\alpha, \beta, \gamma)$ 为 L_3 和 L_1 的均方误差, 则:

$$\begin{aligned} g(\alpha, \beta, \gamma) &= E[(\alpha + \beta |L_2| + \gamma |L_2|^2 - |L_1|)^2] \\ &= \alpha^2 + \beta^2 E[|L_2|^2] + \gamma^2 E[|L_2|^4] + E[|L_1|^2] + \\ &\quad 2\alpha\beta E[|L_2|] + 2\alpha\gamma E[|L_2|^2] - 2\alpha E[|L_1|] + \\ &\quad 2\beta\gamma E[|L_2|^3] - 2\beta E[|L_2||L_1|] - 2\gamma E[|L_2|^2|L_1|] \quad (11) \end{aligned}$$

为了求出参数 α, β, γ , 使得 $g(\alpha, \beta, \gamma)$ 达到最小值, 分别对式(11)中的 α, β, γ 求偏导数:

$$\begin{cases} \frac{\partial g(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial \alpha} = 0 \\ \frac{\partial g(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial \beta} = 0 \\ \frac{\partial g(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial \gamma} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

将式(11)代入式(12), 可得:

$$\begin{cases} 2\alpha + 2\beta E[|L_2|] + 2\gamma E[|L_2|^2] - 2E[|L_1|] = 0 \\ 2\beta E[|L_2|^2] + 2\alpha E[|L_2|] + 2\gamma E[|L_2|^3] - 2E[|L_2||L_1|] = 0 \\ 2\gamma E[|L_2|^4] + 2\alpha E[|L_2|^2] + 2\beta E[|L_2|^3] - 2E[|L_2|^2|L_1|] = 0 \end{cases} \quad (13)$$

即:

$$\begin{pmatrix} 1 & E[|L_2|] & E[|L_2|^2] \\ E[|L_2|] & E[|L_2|^2] & E[|L_2|^3] \\ E[|L_2|^2] & E[|L_2|^3] & E[|L_2|^4] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E[|L_1|] \\ E[|L_2||L_1|] \\ E[|L_2|^2|L_1|] \end{pmatrix} \quad (14)$$

解得:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & E[|L_2|] & E[|L_2|^2] \\ E[|L_2|] & E[|L_2|^2] & E[|L_2|^3] \\ E[|L_2|^2] & E[|L_2|^3] & E[|L_2|^4] \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E[|L_1|] \\ E[|L_2||L_1|] \\ E[|L_2|^2|L_1|] \end{pmatrix} \quad (15)$$

4 仿真实验与结果分析

首先在 Matlab 软件中构造码长为 1 806、码率为 1/2、列重为 3、行重为 3 的规则 LDPC 码, 即变量节点的度数为 3, 校验节点的度数也为 3, $\lambda(x) = \rho(x) = x^2$ 。采用 BPSK 调制, 经过 AWGN 信道, 每次译码算法中的最大迭代次数都设置为 80 次, 然后通过蒙特卡罗算法求解出式(15)中相关参数的数学期望 $E[\cdot]$, 通过仿真得到 $\alpha = 212.32$, $\beta = 0.93$, $\gamma = 0.12$ 。改进型 UMP BP-Based 译码算法以及

UMP BP-Based 译码算法、Normalized BP-Based 译码算法和 Offset BP-Based 译码算法的性能曲线如图 3 所示。

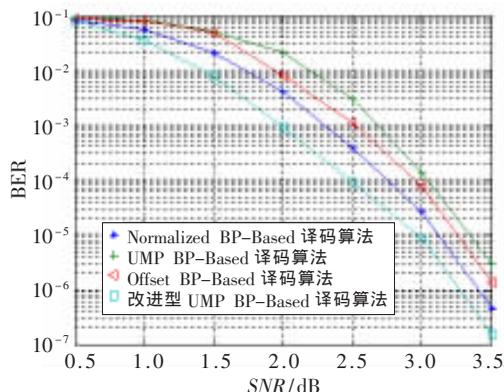


图 3 4 种译码算法的性能比较曲线

从图 3 可以看出,在相同误码率 BER(Bit Error Rate) (BER=10⁻⁵) 的情况下,改进型 UMP BP-Based 译码算法的信噪比 SNR(Signal-to-Noise Ratio)比 UMP BP-Based 译码算法的 SNR 节省将近 0.4 dB,比 Normalized BP-Based 译码算法和 Offset BP-Based 译码算法的 SNR 分别节省 0.1 dB 和 0.2 dB。由此说明改进型 UMP BP-Based 译码算法在上述的 4 种译码算法中具有更好的性能。

由于 UMP BP-Based 译码算法中校验节点的信息传递公式是对 LLR BP 算法中校验节点的信息传递公式的近似,所以 UMP BP-Based 译码算法的性能在一定程度上有所下降。本文提出一种改进型 UMP BP-Based 译码算法,该算法的创新之处在于,利用最小均方误差准则推导出了一个更加近似的公式,能够进一步降低由于近似计算带来的误差,并且对所有的 LDPC 码的译码具有通用性。这在 LDPC 码的应用领域,具有一定的实用价值。

参考文献

- [1] YANG K, FELDMAN J, WANG X D. Nonlinear programming approaches to decoding low-density parity-check codes [J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 2006,24(8):1603-1613.
- [2] SWAMY R, BATES S, BRANDON T L, et al. Design and test of a 175-Mb/s, rate-1/2 (128,3,6) low-density parity-check convolutional code encoder and decoder [J]. IEEE Journal of Solid-State Circuits, 2007,42(10):2245-2256.
- [3] LIU L, SHI C J R. Sliced message passing: high through-

put overlapped decoding of high-rate low-density parity-check codes [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2008,55(11):3697-3710.

- [4] HONG S N, KIM S, SHIN D J, et al. Quasi-cyclic low-density parity-check codes for space-time bit-interleaved coded modulation[J]. IEEE Communications Letters, 2008, 12(10):767-769.
- [5] CHEN H Y, LIN M C, UENG Y L. Low-density parity-check coded recording systems with run-length-limited constraints [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2008,44(9): 2235-2242.
- [6] GONG C, LIU Q, CUI H J, et al. Switch-type hybrid hard decision decoding algorithms for regular low-density parity-check codes [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2008,54(7):3181-3188.
- [7] RAZAGHI P, YU W. Bilayer low-density parity-check codes for decode-and-forward in relay channels [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2007,53(10):3723-3739.
- [8] PISHRO-NIK H, FEKRI F. Results on punctured low-density parity-check codes and improved iterative decoding techniques[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2007,53(2):599-614.
- [9] HONARY B, MOINIAN A, AMMAR B. Construction of well-structured quasi-cyclic low-density parity check codes [J]. IEE Proceedings of Communications, 2005,152(6): 1081-1085.
- [10] SADEGHI M R, BANIHASHEMI A H, PANARIO D. Low-density parity-check lattices: construction and decoding analysis [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006,52(10):4481-4495.
- [11] KIM N, KIM J, PARK H, et al. An improvement of UMP-BP decoding algorithm using the minimum mean square error linear estimator[J]. ETRI Journal, 2004, 26(5):432-436.
- [12] KIM N, PARK H. Modified UMP-BP decoding algorithm based on mean square error[J]. Electronics Letters, 2004,40(13):816-817.

(收稿日期:2009-09-14)

作者简介:

张天瑜,男,1980年生,硕士,讲师,主要研究方向:无线通信技术、通信系统仿真、信道编解码。