

## 离散分数阶 Fourier 变换的高速 FPGA 实现

范瑜

(江苏省常熟理工学院 物理与电子工程学院, 江苏 常熟 215500)

**摘要:**介绍了一种直接在时域和频域对信号进行离散的数值计算方法。针对工程实际,提出了一种基于 FPGA 的硬件实现方法,同时给出了具体的算法和计算机仿真结果。

**关键词:**分数阶 Fourier 变换;FPGA;VHDL;数值计算方法

中图分类号:TP301

文献标识码:B

## High speed FPGA implementation of discrete fractional Fourier transform

FAN Yu

(College of Physics and Electronic Engineering, Changshu Institute of Technology, Changshu 215500, China)

**Abstract:** A numerical method of discrete fractional Fourier transform is introduced in this paper, which samples the signal in time domain and frequency domain directly. The numerical method based on FPGA platform, the algorithm and simulation results are also given.

**Key words:** fractional Fourier transform; FPGA; VHDL; numerical method

Fourier 变换 FT (Fourier Transform) 主要用于处理频率不随时间变化的平稳信号,在时频面时间轴与频率轴相互垂直,即 Fourier 变换是从时间域旋转  $\pi/2$  到频率域。但是 Fourier 变换通常无法表述信号的时频域性质,不能表示某种频率分量发生在哪个时间,而这种性质恰恰是非平稳信号关键的性质,对非平稳信号十分重要。分数阶 Fourier 变换 FrFT (Fractional Fourier Transform) 是 Fourier 变换的广义形式,最早由 Namias 以数学形式提出,并很快在光学领域得到广泛应用。它揭示了信号从时间域到频率域变化过程中所呈现的特征,即从时间域和频率域同时表示信号旋转  $\pi/2$  的分数倍时的特征,从而克服了传统 Fourier 变换不能反映非平稳信号的统计量随时间变化的缺陷。作为一种新的时频分析工具,FrFT 是一种线性变换,既与经典的 Fourier 变换有着天然的联系,又提供了 Fourier 变换所不具备的某些特点,而且它与小波变换、Wigner-Ville 分布(WVD)都有密切的关系<sup>[1-5]</sup>。因此近年来 FrFT 受到了研究者的广泛关注,相应的离散变换算法也相继提出<sup>[6-8]</sup>。此外,有关 FrFT 应用的研究也越来越多,它是一种具有广泛应用前途的时频信号分析工具。Chirp 信号即线性调频信号,信号瞬时频率随时间呈线性变化,在雷达信号探测和成像方面有着重要的应用价值。

## 1 分数阶 Fourier 变换与计算

传统的 Fourier 变换  $X(\omega)$  就是将  $x(t)$  在时频面逆时针旋转  $\pi/2$ , 即  $x(t)$  由时间轴  $t$  变到频率轴  $\omega$  的表示形式,而 FrFT 的定义将其推广到时频面上任意角度的旋转,可表示为:

$$X_a(u) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) K_a(t, u) dt \quad (1)$$

其中,变换核  $K_a(t, u)$  定义为:

$$K_a(t, u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1-j\cot a}{2\pi}} e^{j((t+u)/2)\cot a - jtu\csc a} & , (a \neq n\pi) \\ \delta(t-u) & , (a=2n\pi) \\ \delta(t+u) & , (a=(2n+1)\pi) \end{cases} \quad (2)$$

式中  $n$  为整数。

关于 FrFT 的基本性质与应用,可参考文献[1]。

## 2 离散分数阶 Fourier 变换算法

在实际工程应用中,使用更多的是离散 FrFT,而如何在离散时域和频域信号保持 FrFT 良好的信号分析特性是近年来研究的重点。然而,量化后的离散分数阶 Fourier 变换同时也失去很多的重要性质,不再具有叠加性质和可逆性。因此,它的应用具有局限性。经过改进,得到了与连续分数阶 Fourier 变换得到相似的结果,虽然它的工作状况与连续

## 技术与方法

Technique and Method

的很相似,但是仍然不能满足叠加性,另外,输入信号必须要满足一定的条件。本文使用参考文献[7]给出的离散计算方法,能够保持算法的可逆性和正交性。在许多信号处理的应用场合,必须使用可编程器件来完成计算,编写 VHDL 语言,可完成基于 FPGA 的 DFrFT 硬件实现。分数阶 Fourier 变换的定义如下:

$$F_a(u) = \sqrt{\frac{1-j\cot\alpha}{2\pi}} e^{\frac{j}{2}\cot\alpha u^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\csc\alpha \cdot u \cdot t} e^{\frac{j}{2}\cot\alpha t^2} f(t) dt \quad (3)$$

式中,  $\alpha$  表示旋转角,  $\mu$  表示分数阶的自变量。

对输入函数  $f(t)$  和输出函数  $F_a(u)$  量化,分别在  $t, u$  上取一小段  $\Delta t, \Delta u$ , 是到时域和分数阶域的离散表示为:

$$y(n) = f(n \cdot \Delta t), Y_a(m) = F_a(m \cdot \Delta u) \quad (4)$$

其中  $n = -N, -N+1, \dots, N; m = -M, -M+1, \dots, M$  则(3)式可离散写成:

$$Y_a(m) = \sqrt{\frac{1-j\cot\alpha}{2\pi}} \cdot \Delta t \cdot e^{\frac{j}{2}\cot\alpha \cdot m^2 \cdot \Delta u^2} \times \sum_{n=-N}^N e^{-j\cot\alpha \cdot m \cdot n \cdot \Delta u \Delta t} \cdot e^{\frac{j}{2}\cot\alpha \cdot n^2 \cdot \Delta t^2} \cdot y(n) \quad (5)$$

上式又可以表示为:

$$Y_a(m) = \sum_{n=-N}^N F_a(m, n) \cdot y(n) \quad (6)$$

式(6)中

$$F_a(m, n) = \sqrt{\frac{1-j\cot\alpha}{2\pi}} \cdot \Delta t \cdot e^{\frac{j}{2}\cot\alpha \cdot m^2 \cdot \Delta u^2} \cdot e^{-j\cot\alpha \cdot m \cdot n \cdot \Delta u \Delta t} \cdot e^{\frac{j}{2}\cot\alpha \cdot n^2 \cdot \Delta t^2} \quad (7)$$

为了使(6)式可逆,当  $M > N$  时反变换得:

$$y(n) = \sum_{m=-M}^M F_a^*(m, n) \cdot Y_a(m) \quad (M > N) \quad (8)$$

代入(6)和(7)式得:

$$y(n) = \sum_{m=-M}^M \sum_{k=-N}^N F_a^*(m, n) \cdot F_a(m, k) \cdot y(k) \\ = \frac{\Delta t^2}{2\pi \sin \alpha} \sum_{m=-M}^M \sum_{k=-N}^N e^{\frac{j}{2}\cot\alpha \cdot (k-n)^2 \Delta t^2} \cdot e^{j\csc\alpha \cdot (n-k) \Delta u \Delta t} \cdot y(k) \quad (9)$$

要使(9)中的对  $m$  求和成为  $\delta(n-k)$ , 那么:

$$\Delta u \cdot \Delta t = s \cdot 2\pi \cdot \sin \alpha / (2M+1) \quad (10)$$

其中  $|s|$  是最大值为  $2M+1$  的整数。所以(7)式变为:

$$F_a(m, n) = \sqrt{\frac{1-j\cot\alpha}{2\pi}} \cdot \Delta t \cdot e^{\frac{j}{2}\cot\alpha \cdot m^2 \cdot \Delta u^2} \cdot e^{-j\frac{s \cdot 2\pi \cdot n \cdot m}{2M+1}} \cdot e^{\frac{j}{2}\cot\alpha \cdot n^2 \cdot \Delta t^2} \quad (11)$$

所以

$$y(n) = \sum_{m=-M}^M \sum_{k=-N}^N F_a^*(m, n) \cdot F_a(m, k) \cdot y(k) \\ = \frac{2M+1}{2\pi \operatorname{sgn}(\sin \alpha) \cdot \sin \alpha} \cdot \Delta t^2 \cdot y(n) \quad (12)$$

由上式可解得  $\frac{\Delta t^2 (2M+1)}{2\pi \cdot \operatorname{sgn}(\sin \alpha) \cdot \sin \alpha} = 1$ , 即

$$\frac{\Delta t^2}{2\pi} = \frac{\operatorname{sgn}(\sin \alpha) \cdot \sin \alpha}{2M+1} \quad (13)$$

代入(11)式得到

$$F_a(m, n) = \sqrt{\frac{\operatorname{sgn}(\sin \alpha) \cdot (\sin \alpha - j \cot \alpha)}{2M+1}} \cdot e^{j/2 \cot \alpha \cdot m^2 \cdot \Delta u^2} \cdot e^{-j \frac{s \cdot 2\pi \cdot n \cdot m}{2M+1}} \cdot e^{j/2 \cot \alpha \cdot n^2 \cdot \Delta t^2} \quad (14)$$

令  $S = \operatorname{sgn}(\sin \alpha) = \pm 1$ , 则上式可以转化为

$$F_a(m, n) = \sqrt{\frac{|\operatorname{sgn}(\sin \alpha) - j \operatorname{sgn}(\sin \alpha) \cos \alpha}{2M+1}} \cdot e^{\frac{j}{2} \cot \alpha \cdot m^2 \cdot \Delta u^2} \cdot e^{j/2 \cot \alpha \cdot n^2 \cdot \Delta t^2} \quad (15)$$

(1) 若  $\sin \alpha > 0$

$$y_a(m) = \sqrt{\frac{\sin \alpha - j \cos \alpha}{2M+1}} \cdot e^{\frac{j}{2} \cot \alpha \cdot m^2 \cdot \Delta u^2} \cdot e^{\frac{j}{2} \cot \alpha \cdot n^2 \cdot \Delta t^2} \times \sum_{n=-N}^N e^{j \frac{2\pi \cdot n \cdot m}{2M+1}} \cdot y(n) \quad (16)$$

其中  $\alpha \in 2D\pi + (0, \pi)$ ,  $D$  为整数。

(2) 若  $\sin \alpha < 0$

$$y_a(m) = \sqrt{\frac{-\sin \alpha + j \cos \alpha}{2M+1}} \cdot e^{\frac{j}{2} \cot \alpha \cdot m^2 \cdot \Delta u^2} \cdot e^{\frac{j}{2} \cot \alpha \cdot n^2 \cdot \Delta t^2} \times \sum_{n=-N}^N e^{j \frac{2\pi \cdot n \cdot m}{2M+1}} \cdot y(n) \quad (17)$$

其中  $\alpha \in 2D\pi + (-\pi, 0)$ ,  $D$  为整数

这里  $M \geq N, \Delta u \Delta t = 2\pi \cdot |\sin \alpha| / (2M+1)$

如果  $M=N, \alpha=\pi/2$ , 则式(10)变成 DFT; 若  $\alpha=-\pi/2$ , 则式(12)变为 IDFT。

### 3 离散分数阶 Fourier 变换的计算方法与硬件实现<sup>[9-11]</sup>

离散分数阶 Fourier 变换 (DFrFT) 算法的形式如下:

$$y_a(m) = \sqrt{\frac{\sin \alpha - j \cos \alpha}{2M+1}} \cdot e^{\frac{j}{2} \cot \alpha \cdot m^2 \cdot \Delta u^2} \cdot e^{\frac{j}{2} \cot \alpha \cdot n^2 \cdot \Delta t^2} \times \sum_{n=-N}^N e^{j \frac{2\pi \cdot n \cdot m}{2M+1}} \cdot y(n) \quad (18)$$

这里可以把  $\sqrt{\frac{\sin \alpha - j \cos \alpha}{2M+1}} \cdot e^{\frac{j}{2} \cot \alpha \cdot m^2 \cdot \Delta u^2}$  看作一个常数,

而  $e^{\frac{j}{2} \cot \alpha \cdot n^2 \cdot \Delta t^2} \cdot y(n)$  可以作为输入信号, 令为  $x(n)$ , 则  $\sum_{n=-N}^N e^{j \frac{2\pi \cdot n \cdot m}{2M+1}}$

$\cdot x(n)$  可以用 FFT 实现。为便于 FPGA 的并行处理以提高整体运行速度, 当可编程器件拥有足够资源的时候, 在进行

FFT 的时候又可以将其  $\sum_{n=-N}^N e^{j \frac{2\pi \cdot n \cdot m}{2M+1}} \cdot x(n)$  变换为

$$\sum_{n=-N}^N e^{j \frac{2\pi \cdot n \cdot m}{2M+1}} \cdot x(n) \sum_{n=-N}^0 e^{j \frac{2\pi \cdot n \cdot m}{2M+1}} \cdot x(n) - x(0)$$

来实现; 同时, 在实时性要求较高的场合, 对  $\sin \alpha > 0$  和  $\sin \alpha < 0$  的两种情况可以分别进行单独的逻辑综合和硬件实现, 这样也便于进行多分量并行处理。硬件电路总体设计思路如图 1 所示。存储单元 RAM 的计算机仿真结果如图 2 所示。旋转因子乘法器的计算机仿真结果  $((70+j50)e^{jm^9})$ , 如图 3 所示。

FrFT 是 Fourier 变换的推广形式, 在非平稳信号的分析

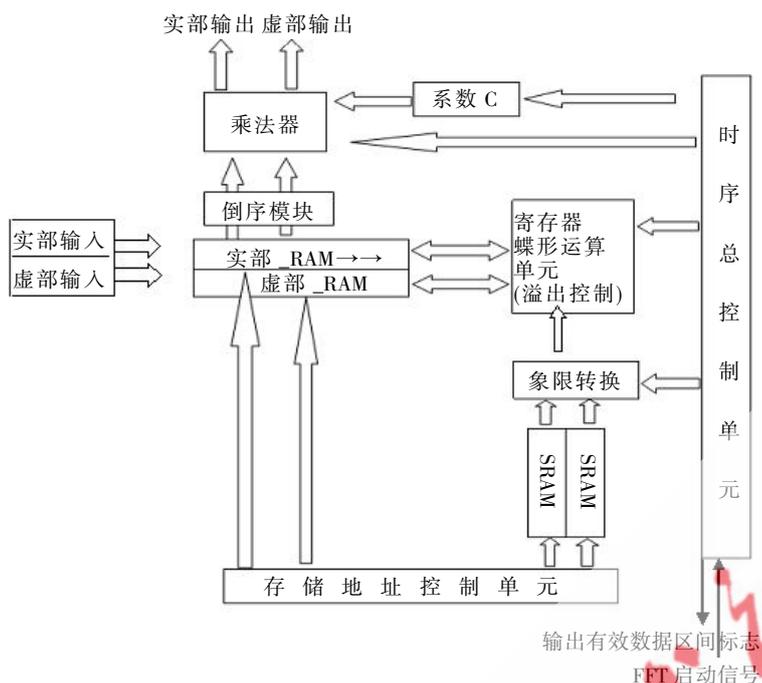


图 1 DFrFT 的硬件设计总体框图

与参数检测等领域具有更普遍的特性和更广的应用场合,尤其是在 Fourier 变换不能解决问题的场合,FrFT 更显其优越性。本文研究了 FrFT 的硬件实现方式,采用高速 FPGA 作为硬件平台,利用 VHDL 语言,实现了在 FPGA 平台上的

FrFT。计算机仿真表明,该算法具有速度快、易于实现并行算法、效率高的特性,在雷达、声纳等实时信号处理等领域有着广泛的应用价值。

参考文献

[1] ALMEIDA L B. The fractional Fourier transform and time-frequency representation [J]. IEEE Trans Signal Processing, 1994(42):3084-3091.  
 [2] OZAKTAS H M, MENDLOVIC D. Fractional Fourier optics [J]. J Opt Soc Amer A, 1995(12): 743-751.  
 [3] LOHMANN A W. Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform [J]. J Opt Soc Amer A, 1993(10):2181-2186.  
 [4] KUTAY M A, OZAKTAS H M, ONURAL L, et al. Optimal filtering in fractional Fourier domains [C]. IEEE Int Conf Acoust Speech Signal Processing, Detroit, MI, 1995(1):937-940.  
 [5] DORSCH R G, LOHMANN A W, BITANK Y, et al. Chirp filtering in the fractional Fourier domain [J]. Appl Opt, 1994(33):7599-7602.  
 [6] SANTHANAM B, MCCLELLAN J H. The discrete rotational Fourier transforms [J]. IEEE Trans Signal Processing, 1996(42):994-998.  
 [7] PEI S C, DING J J. Closedform discrete fractional and affine Fourier transforms [J]. IEEE Trans Signal Process, 2000(48): 1338-1353.



图 2 存储单元 RAM 的仿真结果

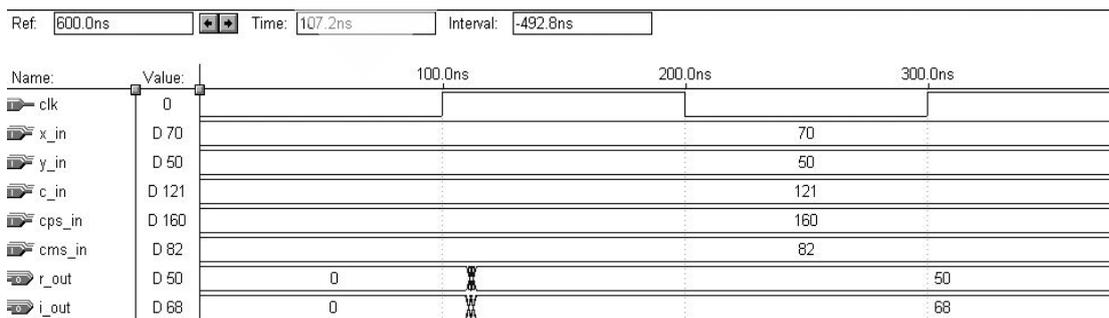


图 3 旋转因子乘法器的仿真结果

(下转第 65 页)

(上接第 62 页)

[8] OZAKTAS H M, ARIKAN O, KUTAY A, et al. Digital computation of the fractional Fourier transform[J]. IEEE Trans. Signal Processing, 1996, 44:2141-2150.

[9] 王开军,姜宇柏. 面向 CPLD/FPGA 的 VHDL 设计[M]. 北京:机械工业出版社, 2007.

《微型机与应用》2009 年第 22 期

[10] 刘凌,胡永生.数字信号处理的 FPGA 实现[M].北京:清华大学出版社, 2004.

《电子技术应用》

www.ChinaAET.com

[11] 姜雪松,吴钰淳. VHDL 设计实例与仿真[M].北京:机械工业出版社, 2007.

(收稿日期:2009-04-22)

欢迎网上投稿 www.pcachina.com 65

《电子技术应用》

www.ChinaAET.com