

## 非线性滤波算法在机动目标跟踪中的研究\*

曹洁, 文如泉

(兰州理工大学 电气工程与信息工程学院, 甘肃 兰州 730050)

**摘要:** 介绍了3种最基本非线性滤波算法——扩展卡尔曼滤波(EKF)、无迹卡尔曼滤波(UKF)和粒子滤波(PF)算法的理论在机动目标跟踪中的应用。通过仿真试验对三者性能进行了分析比较。

**关键词:** 目标跟踪; 非线性滤波; 扩展卡尔曼滤波; 无迹卡尔曼滤波; 粒子滤波

中图分类号: TN957

文献标识码: B

## Performance comparisons of nonlinear filtering algorithms for maneuvering target tracking

CAO Jie, WEN Ru Quan

(College of Electrical and Information Engineering, Lanzhou Univ. of Technology, Lanzhou 730050, China)

**Abstract:** Maneuvering target tracking is a nonlinear problem that involves the estimation of the state at every time instant. This paper gives a brief introduction of three basic nonlinear filtering algorithms, such as EKF, UKF and PF. The comparison of the three algorithms' performance in target-tracking is presented and the simulation results are also given.

**Key words:** target tracking; nonlinear filter; extended Kalman filter; unscented Kalman filter; particle filter

在目标跟踪中, 可靠而精确的机动目标跟踪是目标跟踪系统设计的主要目的。而对机动目标跟踪技术的研究, 在军事以及民用领域中都有着十分重要的意义。对于机动目标跟踪问题的解决, 不同的学者提出过不同的解决方案。常规的卡尔曼滤波算法(KF)对线性高斯型的系统能得到最优估计, 对非线性、非高斯系统的问题的解决主要有两类, 一类是函数近似法; 另一类是基于采样方法的近似法。

## 1 非线性滤波技术

## 1.1 状态空间描述

为定义非线性滤波问题, 首先引入状态空间模型

$$x_k = f_k(x_{k-1}) + w_{k-1} \quad (1)$$

$$z_k = h_k(x_k) + v_k \quad (2)$$

其中,  $f_k$  为状态方程,  $w_{k-1}$  是过程噪声。  $h_k$  为观测方程,  $v_k$  是观测噪声,  $k$  为自然数。

## 1.2 扩展卡尔曼滤波算法

该滤波算法的基本思想是将系统模型在状态的估计值附近进行泰勒展开, 利用展开式中的一次项来对模型中的非线性函数  $f_k$  或  $h_k$  进行线性化处理, 计算其雅克比矩阵; 然后在标准卡尔曼滤波框架下进行递推滤波<sup>[1-2]</sup>。

通过近似线性化, 得到对应的扩展卡尔曼滤波法为:

$$\bar{x}_{k|k-1} = f_k(\bar{x}_{k-1}) \quad (3)$$

$$P_{k|k-1} = F_k P_{k-1} F_k^T + G_k Q_k G_k^T \quad (4)$$

$$K_k = P_{k|k-1} H_k^T [U_k R_k U_k^T + H_k P_{k|k-1} H_k^T]^{-1} \quad (5)$$

$$\bar{x}_k = \bar{x}_{k|k-1} + K_k (z_k - h(\bar{x}_{k|k-1})) \quad (6)$$

$$P_k = P_{k|k-1} - K_k H_k P_{k|k-1} \quad (7)$$

其中,  $K_k$  为卡尔曼滤波增益,  $Q$  为状态噪声方差,

$R$  为观测噪声方差;  $F_k = \left. \frac{\partial f(x_k)}{\partial x_k} \right|_{\bar{x}_{k|k-1}}$  和  $G_k = \left. \frac{\partial f(w_k)}{\partial w_k} \right|_{w_k}$  为雅

基金项目: 甘肃省自然科学基金项目(0710RJZA060)

## 技术与方法 Technique and Method

可比状态模型,  $H_k = \frac{\partial h(x_k)}{\partial x_k} \Big|_{\bar{x}_{k-1}}$  和  $U_k = \frac{\partial f(v_k)}{\partial v_k} \Big|_{v_k}$  为雅可比观测模型。

从理论上讲, 这种做法就是把系统模型的整体特性(均值和方差)用局部特性(导数)近似表示, 这不可避免地会产生很大误差, 尤其是当系统模型呈现高阶的非线性时, 这种直接将非线性作线性近似化处理的缺陷就更为明显, 还有可能导致滤波发散<sup>[3]</sup>。

### 1.3 无迹卡尔曼滤波算法(UKF)

无迹卡尔曼滤波(UKF)算法是由Julier等人首先提出的, 它是一种基于Unscented Transformation变换<sup>[4]</sup>的新型滤波算法。其基本思想是在给定值到 $k$ 时刻观测值的条件下, 根据已知先验信息和测量值集合, 构建状态的后验概率密度函数(PDF), 经过递推得到完整的目标状态最优估计, 求出状态的均值和方差; 然后, 在原先状态分布中按某一规则取一些点, 使这些点的均值和协方差等于原状态分布的均值和协方差; 将这些点代入非线性函数中, 得到相应非线性函数值点集, 再在标准卡尔曼滤波框架下进行递推滤波。该算法具体步骤如下:

(1) 初始化: 根据系统的期望  $\bar{x} = E[x_0]$  和方差  $D = E[(x_0 - \bar{x})(x_0 - \bar{x})^T]$  赋初值,  $\chi_0 = \bar{x}$ ,  $P_0 = D$ ;

(2) 计算权值:

$$W_0^{(m)} = \lambda / (L + \lambda) \quad (8)$$

$$W_0^{(c)} = W_0^{(m)} + (1 - \alpha^2 - \beta) \quad (9)$$

$$W_i^{(m)} = W_i^{(c)} = 1/2(L + \lambda) \quad i = 1, \dots, 2L \quad (10)$$

式中, 规模因子  $\lambda = \alpha^2(L + \kappa) - L$ ,  $\alpha$  为影响  $\Sigma$  的扩展因子,  $\alpha$  通常设为 0,  $\beta$  为表示  $x$  先验分布的因子(对于高斯分布来说, 通常设为 2)。

(3) 计算  $\Sigma$  点:

$$\chi_{0,k} = \chi_k \quad k \in \{0, 1, \dots, \infty\} \quad (11)$$

$$\chi_{i,k} = \chi_k + \left( \sqrt{(L + \lambda) P_k} \right)_i \quad i = 1, \dots, L \quad (12)$$

$$\chi_{i,k} = \chi_k - \left( \sqrt{(L + \lambda) P_k} \right)_{i-L} \quad i = L+1, \dots, 2L \quad (13)$$

式中,  $\left( \sqrt{(L + \lambda) P_k} \right)_i$  为矩阵  $\sqrt{(L + \lambda) P_k}$  的第  $i$  行(或列)。

(4) 时间更新

$$x_k = (f x_{k-1}) + w_k \quad (14)$$

$$\bar{x}_k = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(m)} x_{i,k} \quad (15)$$

$$\bar{P}_k = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(c)} [x_{i,k} - \bar{x}_k][x_{i,k} - \bar{x}_k]^T + Q_k \quad (16)$$

$$z_k = h(x_k) + v_k \quad (17)$$

$$\bar{z}_k = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(c)} z_{i,k} \quad (18)$$

(5) 量测更新:

$$P_{z_k} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(c)} [z_{i,k} - \bar{z}_k][z_{i,k} - \bar{z}_k]^T + R_k \quad (19)$$

$$P_{x_k z_k} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(c)} [x_{i,k} \quad \bar{x}_k \quad 1 z_{i,k} \quad \bar{z}_k]^T \quad (20)$$

$$K_k = P_{x_k z_k} (P_{z_k})^{-1} \quad (21)$$

$$\chi_k = \bar{x}_k + K_k (z_k - \bar{z}_k) \quad (22)$$

$$P_k = \bar{P}_k - K_k P_{z_k} K_k^T \quad (23)$$

式中,  $L$  为状态向量的维数,  $Q(k)$  是过程噪声的方差,  $R(k)$  是两侧噪声的方差。

与EKF算法相比, UKF不需要对函数进行微分, 因此除对函数的可微性不作要求外, 即使函数不连续且存在奇异点(无导数存在)也能进行滤波, 因而适用范围较广。此外, UKF算法对于噪声服从高斯分布的状态估计可以精确到三阶, 对于噪声服从非高斯分布的状态估计至少可以达到两阶<sup>[5]</sup>, 因此, 它适合于解决高阶非线性问题。

### 1.4 粒子滤波算法(PF)

粒子滤波是一种基于随机采样的滤波方法, 主要解决非线性非高斯问题。粒子滤波实质是递推Bayes滤波的一种实现形式, 在每一时刻, 利用状态空间中一系列随机样本集(粒子)来近似系统状态的后验概率密度函数(PDF), 从而得到下一时刻的状态估计。其主要思想是利用这些采样点和权值来获得最小方差的状态估计量, 是一种基于仿真的统计滤波方法。

粒子滤波算法的基本步骤如下<sup>[6]</sup>:

(1) 初始化: 当  $k=0$  时, 确认目标状态的先验概率密度函数  $p(x_0)$  的表示形式, 从中提取  $N$  个样本点  $\{x_0^i, i=1, \dots, N\}$ , 并给每个粒子赋初始权重为  $\{\lambda_0^i, i=1, \dots, N\}$ , 且  $\lambda_0^i = 1/N$ ;

(2) 状态预测, 即重要性采样、权重计算: 当时刻  $k=1, 2, \dots$  时, 从转移先验密度函数  $p(x_k | x_{k-1}^i)$  中提取  $N$  个样本点  $x_k^i$ , 通过公式  $\lambda_k^i = \lambda_{k-1}^i p(z_k | x_k^i)$  计算权重(公式中的  $p(z_k | x_k^i)$  为似然密度函数);

$$(3) \text{权重归一化: } \lambda_k^i = \lambda_k^i / \sum_{i=1}^N \lambda_k^i \quad (24)$$

(4) 重新采样: 定义有效采样尺度:

$$N_{\text{eff}} = \frac{N}{1 + \text{Var}(\lambda_k^i)} \quad (25)$$

如果  $N_{\text{eff}} = \frac{N}{1 + \text{Var}(\lambda_k^i)} < N_{\text{th}}$ , 则对  $\{x_k^i, i=1, \dots, N\}$  重新采样, 重新构造状态集合, 使其近似于分布  $p(x_k | z_k)$ , 并重新设定粒子的权值为  $\lambda_k^i = 1/N$ ; 否则, 不需要进行重采样;

$$(5) \text{状态更新: } x_k = \sum_{i=1}^N x_k^i \lambda_k^i \quad (26)$$

## 技术与方法 Technique and Method

随机样本粒子在粒子滤波器中没有明确的格式，也不受模型线性和高斯假设的约束。粒子滤波器采用这些随机样本就可以近似得到任意函数的数学期望，从而得到基于物理模型的近似最优数值解。因此，粒子滤波器是一种适用于强非线性、无高斯约束的基于模拟的统计滤波器，具有精度高、收敛速度快等特点。

### 2 仿真试验

#### 2.1 仿真场景

选择文献[7]中的算例，使用本文提到的非线性滤波算法对非线性系统的状态估计进行实验。对所产生的非线性序列进行仿真，该系统模型为：

$$x_k = 1 + \sin(0.04\pi k) + 0.5x_{k-1} + w_k \quad (27)$$

$$z_k = \begin{cases} 0.2x_k^2 + v_k & k \leq 30 \\ 0.5x_k - 2 + v_k & k > 30 \end{cases} \quad (28)$$

式中：过程噪声  $w_k$  是满足 Gamma(3,2) 分布的随机噪声矩阵，观测噪声  $v_k$  是均值为零、方差  $s$  为 0.000 01 的高斯白噪声。该模型采用了两个不同阶段观测模型对系统状态进行观测。

#### 2.2 仿真实验结果分析

实验中，观测时间为  $T=60$  s，粒子数为  $N=200$ 。UT 参数设置为  $\alpha=1$ ， $\beta=0$ ， $k=2$ 。算法的输出为粒子集合的均值，计算公式如下：

$$\hat{x}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_k^j \quad (29)$$

每次独立仿真实验的均方根误差定义为：

$$MSE = \left( \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T (\hat{x}_k - x_k)^2 \right)^{1/2} \quad (30)$$

在一次独立实验中，目标状态的真实值与不同的非线性滤波算法对系统状态估计如图 1 所示。

图 1 中 EKF 算法在前 30s 模型非线性强度较大部分的滤波结果明显比后面部分的滤波结果差。可以看出，EKF 在非线性和非线性强度不大时，能得到更好的效果。而 UKF 和 PF 的仿真结果对模型的变化表现不明显，相对 EKF，这两种算法适用范围更广。

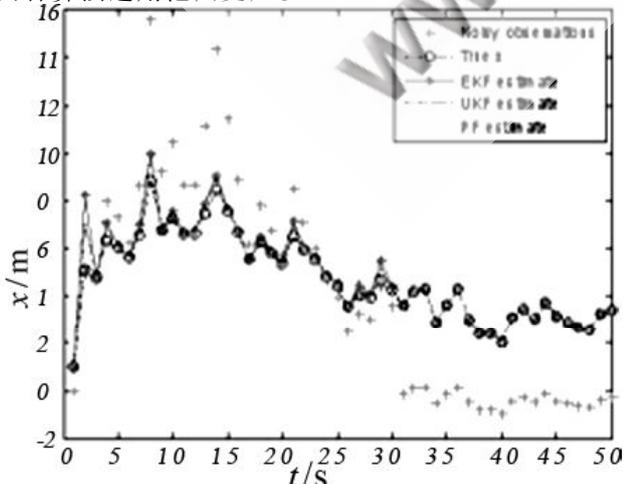


图 1 不同非线性滤波算法的状态估计

图 2 和表 1 给出了经过 30 次独立仿真试验，各种不同滤波器对系统状态估计的均方误差的均值和方差。可以看出，对于一般的非线性、非高斯系统，PF 具有明显优于 EKF 和 UKF 的滤波性能。

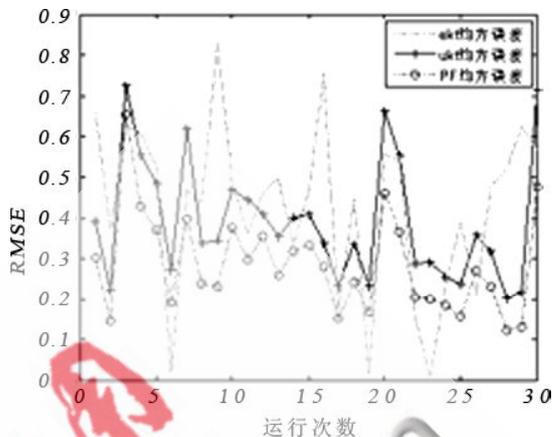


图 2 非线性滤波算法的均方根误差

表 1 均方根误差的均值和方差

算法	均方根误差	
	均值	方差
EKF	0.340 16	0.046 121
UKF	0.355 6	0.015 433
PF	0.260 63	0.010 068

3 种非线性滤波算法完成一次独立实验的运算时间分别为：EKF，0.018 903s；UKF，0.041 189s；PF，1.813 7s。可以看出，EKF、UKF 和 PF 都能解决机动目标的跟踪问题，但在估计精度和实时性上各有优势：EKF 和 UKF 算法估计精度较差，但实时性较好；而 PF 滤波算法估计精度较高，但由于所需的采样粒子数很大，使得计算量增大，实时性较差。

本文详细介绍了 EKF、UKF 和 PF 3 种非线性滤波的理论，并对非线性目标跟踪问题进行了仿真试验，之后，对 EKF、UKF 和 PF 的性能作了比较。EKF 是对非线性系统的局部作线性化处理，与 UKF 和 PF 相比，在计算速度上有明显的优势，但它的性能会随着系统非线性强度的增大显著下降，甚至会出现发散现象。UKF 不需要作线性化处理，而是通过 UT 变换来选取样本点，但它和 EKF 一样都要求概率密度函数一定为高斯分布。如果是一个非线性、非高斯系统，这两种滤波算法都不能取得好的效果。PF 因采用粒子集则可用于任何系统，但它的计算量远远超过 EKF 和 UKF，故 PF 的实时性相对差一些。

#### 参考文献

- [1] 赵 斌.跟踪系统卡尔曼滤波器的仿真对比分析[J]. 长春工业大学学报(自然科学版),2007,(9).
- [2] BUGALLO M F, XU S DJURIC P M. Performance comparison of

# 技术与方法

## Technique and Method

- EKF and particle filtering methods for maneuvering targets[J]. Digital Signal Processing, 2007, 17:774-786.
- [3] XIONG K, ZHANG H Y, CHAN C W. Performance evaluation of UKF based nonlinear filtering[J]. Automatica, 2006, (42):261-270.
- [4] JULIER S, UHLMANN J, DURRAN-WHYTE H. A New Approach for filtering nonlinear systems [C]. In: Presented at Proc. of American Control Conference, Seattle, WA, 1995. 1628-1632.
- [5] WANEA, VANDERM R. The unscented Kalman filter for nonlinear estimation[C]. Proceedings of Symposium 2000 on Adaptive Systems for Signal Processing, Communication and Control, Lake Louise, Alberta, Canada, 2000:153-158.
- [6] 王志刚, 芮国胜, 胡昊. UPF算法及其在目标跟踪中的应用[J]. 雷达科学与技术, 2005, (2).
- [7] VANDER M R, DOUCET A, et al.. The unscented particle filter[R]. Cambridge: Department of Engineering, Cambridge University, 2000:1-45.
- [5] WANEA, VANDERM R. The unscented Kalman filter for nonlinear estimation[C]. Proceedings of Symposium 2000 on Adaptive Sys-

(收稿日期: 2009-03-20)