求解多目标投资组合优化模型的遗传算法

王怀柱

（宁夏大学 数学计算机学院，宁夏 银川 750021）

摘 要：针对考虑最小交易量、交易费用，以及单项目最大投资上限约束的多目标投资组合模型，对目标函数添加惩罚函数项来处理约束条件的方法。本文通过对交叉算子、变异算子的改进，设计了一种遗传算法进行求解。实验算例表明，该算法是有效的。

关键词：投资组合；多目标；遗传算法；异常变异

中图分类号：TP301 **文献标识码**：A

A genetic algorithm for solving multi-objective portfolio selection optimization problem

WANG Huai Zhu

(Department of Mathematics and computer science, Ningxia University, Yinchuan 750021, China)

Abstract: For solving a multi-objective portfolio selection optimization problem with minimum transaction lots, transaction costs and upper limit on the maximum amount of invested capital in any security, used increasing penalty term in objective to due with the subjects. Improving the crossover operator, the mutation operator, presented a genetic algorithm based on integer encoding. It is show by the numerical test that the proposed algorithm is efficient to solve the multi-objective portfolio selection optimization problem.

Key words: portfolio selection; multi-objective; genetic algorithm; abnormal mutation

风险投资具有高风险、高收益、高增长潜力和高技术的特点,如何增加风险投资的收益潜力,降低风险,是极其重要的。

在金融市场众多可供投资的风险或无风险资产中(股票、债券、投资基金、权益产品、银行存款等)，选择适当数量的资产，进行合理的组合投资，可以减小投资的风险，确保投资的收益。Markowitz[1]于1952年提出的均值－方差组合模型是在禁止融资和没有无风险借贷的假设下,以个别股票收益率的均值和方差找出投资组合的有效前沿(Efficient Frontier),即一定收益率水平下方差最小的投资组合。这是一个二次规划问题，利用传统的优化方法容易求解。

最小交易量和交易费用是投资组合中的重要因素，最小交易量是单笔交易中最小的交易数量，我国上海和深圳交易所的股票交易中，最小交易量为100股，近来投资组合优化问题的研究中有些考虑了最小交易量[2-3]。 交易费用是指交易中所要支付的费用。没有交易费的证券组合投资将导致证券市场的无序。我国为了规范证券市场，在交易中要征收个人所得税、印花税等费用。参考文献[4]、[5]也有考虑。参考文献[6]中同时考虑了最小交易量和交易费用，建立了一个改进的多目标投资组合优化模型。该模型是一个带有很强约束的混合整数二次规划模型。针对这一模型，本文通过对目标函数加入惩罚项的方法，使得约束条件降弱，对转化后的模型，运用一种改进的整数编码的遗传算法进行求解，数值实验表明，该算法是有效的。

1 考虑最小交易量和交易费用的投资组合模型

1.1 传统的多目标投资组合优化模型

设有N种不同的投资项目，$x_i, i=1,2\cdots,N$表示投资各个项目所占总投资金额的比重，μ_i表示投资项目i的期望收益率，σ_i^2、$\sigma_{i,j}$分别表示投资项目i收益率的方差及与投资项目j收益率的协方差的无偏估计：

$$\sigma_{ii}=\sigma_i^2=\frac{1}{N-1}\sum_{t=1}^{N}(R_{ti}-\bar{R}_i)^2 \qquad i=1,2,\cdots,N$$

$$\sigma_{ij}=\frac{1}{N-1}\sum_{t=1}^{N}(R_{ti}-\bar{R}_i)(R_{tj}-\bar{R}_j) \qquad i,j=1,2,\cdots,N,i\neq j$$

则投资组合的期望收益可表示为 $R(x)=\sum_{i=1}^{N}\mu_i x_i$，

投资组合的风险表示为：

$$\sigma(x)^2=\sum_{i=1}^{N}x_i\sigma_i^2+\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{N}x_ix_j\sigma_{ij}=xGx^{\mathrm{T}}$$

对投资者来说，总是希望投资的期望收益尽可能的大，同时风险又尽可能的小，因此就得到了目标函数，即：

$$\max \quad R(x)=\sum_{i=1}^{N}\mu_i x_i$$

$$\min \quad \sigma(x)^2=\sum_{i=1}^{N}x_i\sigma_i^2+\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{N}x_ix_j\sigma_{ij}=xGx^{\mathrm{T}} \qquad (1)$$

令 $\lambda\in[0,1]$表示投资者对风险的厌恶指数，则(1)式可转化为：

$$\min \quad f(x)=(1-\lambda)\sigma(x)^2-\lambda R(x)$$

当 $\lambda=0$ 表示投资者更关注收益，是收益最大化，并没有考虑风险；当 $\lambda=1$，表示投资者更关注风险，而不考虑收益。再加上对投资总额的限制，可以得到传统的多目标投资组合优化模型：

$$\min \quad f(x)=(1-\lambda)\sigma(x)^2-\lambda R(x)$$

$$\text{S.t.} \quad \sum_{i=1}^{N}x_i=1 \qquad (2)$$

$$x_i\geqslant 0,i=1,2\cdots,N$$

1.2 改进的多目标投资组合优化模型[6]

假设投资总金额为 C，可允许的最小值和最大值为 C_0 和 C_1，假设最小交易量为 NB 个基本单位，投资 i 的单位价格为 P_i，则投资 i 的最小投资金额为 c_i=$NB\times p_i$。设一种投资组合 k=(k_1,k_2,…,k_N)，则投资的总金额 $C=\sum_{i=1}^{N}NB\times p_i\times k_i$。设交易费用为 $g(C)$，则投资组合的期望收益率为：

$$R(k)=\frac{\sum_{i=1}^{N}\mu_ik_ic_i-g(C)}{C} \qquad (3)$$

方差可表示为：

$$\sigma(k)^2=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sigma_{ij}\frac{k_ic_i}{C}\frac{k_jc_j}{C} \qquad (4)$$

设 μ_i 为投资 i 允许的最大投资金额，则可得到改进的多目标投资组合优化模型：

$$\min \quad f(k)=-\lambda R(k)+(1-\lambda)\sigma(k)^2 \qquad (5)$$

$$\text{s.t.}\ C_0\leq\sum_{i=1}^{N}c_ik_i\leq C_1 \qquad (6)$$

$$0\leq c_ik\leq\mu_i,i=1,2,\cdots,N \qquad (7)$$

这是一个混合整数的二次规划问题，是 NP 完全问题，用传统的优化方法很难求解。根据优化方法，在目标函数中加入惩罚项来处理约束，如式(6)，设 M 是一个大自然数，则模型转化为：

$$\min \quad f(k)=-\lambda R(k)+(1-\lambda)\sigma(k)^2+M\max\{0,C_0-\sum_{i=1}^{N}c_ik_i\}$$
$$+M\max\{0,\sum_{i=1}^{N}c_ik_i-C_1\}\ \ \text{S.t.}\ 0\leq c_ik\leq\mu_i,i=1,2,\cdots,N \qquad (8)$$

当投资组合不满足式(6)时，式(8)的目标函数值将会很大，而投资组合就受到惩罚，从而达到与约束式(6)相同的约束作用。

2 整数编码的遗传算法

2.1 遗传算法的改进策略

2.1.1 编码策略

传统的遗传算法是二进制编码，采用整数编码的策略，每个染色体对应一种投资组合，直接用整数向量 k=(k_1,k_2,…k_N)表示，每个 k_i 的取值在$[0,\lfloor\frac{\mu_i}{c_i}\rfloor]$之间，其中$\lfloor\ \rfloor$为下取整运算。这样得到的编码可满足式(7)。

2.1.2 交叉策略

本算法采用单个染色体，单点交叉的策略，即任意两个染色体的任意位的等位基因相互交叉。

2.1.3 变异策略

本算法采用群体变异策略，即所有染色体，每个基因位都等概率地发生变异，变异算子如下：

$$k_i=\begin{cases}k_i, & \text{概率}\quad 0.5\\ \min(\lfloor\frac{u_i}{c_i}\rfloor,k_i+\beta), & \text{概率}\quad 0.5\end{cases},\ i=1,2,\cdots,N \qquad (9)$$

其中 β 为变异步长，取正整数。

2.1.4 异常变异策略

为了防止算法早熟，采用了异常变异策略，当交叉和变异进行了 D 代之后，或者种群的适应度聚度超过某一阈值 α 之后，整个群体发生无方向变异(最简单的方法是重新初始化种群)，受参考文献[7]的启发，适应度聚度如下：

$$S=\frac{\sum_{i=1}^{N}S_i^2}{NS_{\max}^2},S_{\max}^2=\max_{1\leq i\leq N}\{S_i^2\},S_i^2=(f_i^t-f_{avg}^t)^2,f_{avg}^t=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}f_i^t \qquad (10)$$

这样 $s\in(0,1]$，其中,$\alpha\in(0,1)$，f_i^t(i=1,2,…,N,t=1,2,…D)表示交叉和变异 t 代时染色体 i 的适应度(文中取为适应值)。

2.2 遗传算法步骤

(1)参数设定：设定种群规模为 N，进化代数为 H，异常变异发生代数为 D，异常变异的适应度聚度阈值为 α。

(2)初始化种群：根据编码策略初始化种群，记录最优值。

(3)交叉和变异：按照法则进行交叉和变异，更新最优值。

(4)异常变异：若交叉和变异代数等于 D，或者适应度聚度满足 $S\geqslant\alpha$，则转到(2)。

电子技术应用 APPLICATION OF ELECTRONIC TECHNIQUE www.ChinaAET.com

(5)终止检验：若满足进化终止准则，终止计算，输出最优值。

3 仿真算例

考虑如下的投资组合问题：有6种股票，表1给出了6种股票8个时间段的收益率，表2给出了6种股票的协方差，表3给出了6种股票的价格。

表1 股票的收益率和均值

时期	t-7	t-6	t-5	t-4	t-3	t-2	t-1	t	均值
股票1	0.04	0.07	0.09	0.13	0.14	0.17	0.21	0.24	0.136 2
股票2	0.14	0.06	0.08	0.15	0.11	0.13	0.10	0.11	0.110 0
股票3	0.13	0.13	0.11	0.15	0.10	0.07	0.14	0.11	0.117 5
股票4	0.12	0.04	0.18	0.13	0.19	0.16	0.14	0.11	0.133 8
股票5	0.18	0.06	0.22	0.15	0.14	0.06	0.08	0.09	0.122 5
股票6	0.15	0.04	0.08	0.06	0.13	0.05	0.10	0.09	0.087 5

表2 股票的协方差

	股票1	股票2	股票3	股票4	股票5	股票6
股票1	0.0041	0.0002	-0.0003	0.0006	-0.0018	-0.0003
股票2	0.0002	0.0008	0.0000	0.0004	0.0003	0.0003
股票3	-0.0003	0.0000	0.0006	-0.0005	0.0003	0.0001
股票4	0.0006	0.0004	-0.0005	0.0019	0.0012	0.0006
股票5	-0.0018	0.0003	0.0003	0.0012	0.0031	0.0009
股票6	-0.0003	0.0003	0.0001	0.0006	0.0009	0.0013

表3 股票价格

股票	1	2	3	4	5	6
价格	12.44	18.59	45.12	26.45	19.78	35.21

注：表1、表3中的数据引自参考文献[6]

假设股票的最小交易量 N_B=100，C_0=1 000 000，C_1=1 005 000，并令每种股票的最大交易金额 μ_i=200 000，i=1,2⋯,N，交易费用设为0.01C，分别取 λ=0、0.2、0.4、0.6、0.8、1.0，阈值取 α=0.8、0.85、0.9，种群规模为50，进化代数为2 000，异常变异代数为50，变异步长为1，在Genuine Intel(R) CPU T2050 @1.60 GHz、1.05 GHz、1.00 GB内存的计算机上用Matlab7.0编写程序进行计算，每次计算独立运行50次，取其平均值，结果如表4所示。

表4 对应不同 λ 值，不同阈 α 值的计算结果

α	λ	0.0	0.2	0.4
0.75	f	3.733 3e-04	-2.185 3e-02	-4.418 2e-02
	T	37.190 0	28.170 0	27.574 5
0.80	f	3.733 1e-04	-2.184 9e-02	-4.409 1e-02
	T	33.393 3	32.467 2	39.543 3
0.85	f	3.733 0e-04	-2.189 7e-02	-4.421 9e-02
	T	37.273 3	40.070 0	28.130 7
0.90	f	3.733 1e-04	-2.185 3e-02	-4.411 3e-02
	T	40.286 7	57.740 0	45.950 0
min f		3.638 5e-04	-2.225 0e-02	-4.496 5e-02
α	λ	0.6	0.8	1.0
0.75	f	-6.662 4e-02	-8.870 0e-02	-1.109 2e-01
	T	32.452 2	44.86 67	37.080 0
0.80	f	-6.633 0e-02	-8.871 1e-02	-1.112 4e-01
	T	29.306 8	47.743 3	37.613 3
0.85	f	-6.647 6e-02	-8.893 5e-02	-1.109 2e-01
	T	29.306 8	49.610 0	38.463 3
0.90	f	-6.624 1e-02	-8.870 1e-02	-1.111 3e-01
	T	37.603 3	49.653 3	39.686 7
min f		-6.740 2e-02	-8.975 0e-02	-1.131 0e-01

注：其中，α 表示阈值，f 表示独立运行50次的适应值算数平均值，T 表示平均运行时间(单位为秒)，min f 表示所得到的最优适应值。

由表4可以看出：

(1)该算法求解上述模型得到了很好的结果，计算时间不超过1min；

(2)对于取不同阈值得到的平均适应值与最优适应值的相对误差在 10^{-2} 之内，说明算法是稳定的。

(3)当阈值取0.85左右时，效果更好。

(4)平均计算时间随阈值的增加而增加。

本文针对考虑最小交易量、交易费用以及投资项目的最大上限约束的多目标投资组合优化模型，通过在目标函数中加入惩罚项来处理投资总金额的约束，将模型的约束条件弱化，并提出了一种整数编码的遗传算法，该算法求解多目标投资组合优化模型是可行的、有效的。

参考文献

[1] MARKOWITZ H. Portfolio selection[J]. Journal of Finance,1952, 7(1):77-91.

[2] KELLERER H, MANSINI R, SPERANZA M G. On selecting a portfolio with fixed costs ang minimum lots[J].Annals of Oprations Research,2000,99(3):287-304.

[3] FERNANDEZ A, GOMEZ S. Portfolio selection using neural networks. Computer & Operations Research.2007;(34):1177-1191.

[4] CHANG T J, MEADE N, BEASLEY J, et al. Heuristics for cardinality constrained portfolio optimization.Computer & Operations Research, 2000(27):1271-1302.

[5] 赵娟，李科学. 有交易费的证券组合投资优化模型. 华北水利水电学院学报，2006, 27(2):110-112.

[6] 林丹，李小明，王萍. 用遗传算法求解改进的投资组合模型. 系统工程，2005, 23(8): 68-72.

[7] DUAN Yu Hong, GAO Yue Lin, LI Ji Min. A new adaptive particle swarm optimization algorithm with dynamically changing inertia weight. Intelligent Information Management Systems and Technologies, 2006, 2(2): 245-255.

(收稿日期：2009-02-11)