

## 非均匀采样信号的滑动滤波方法\*

高玉凯, 郑双雁

(大庆师范学院 物理与电气信息工程学院, 黑龙江 大庆 163712)

**摘要:** 针对实际采样过程中出现的采样非均匀性, 提出了基于连续傅里叶变换的非均匀采样信号频谱分析方法和非均匀采样信号的滑动滤波方法。将非均匀采样信号描述为不均匀采样时刻冲激函数代数和的形式, 利用连续傅里叶变换得到非均匀采样信号的频谱特性, 根据不同采样间隔, 得到非均匀采样信号的滑动滤波方法。通过 MATLAB 仿真软件验证了这种非均匀采样信号分析与处理方法的正确性, 将这一研究成果应用到机械抖动激光陀螺输出信号处理中, 与常规的平均滤波方法相比, 激光陀螺的零偏误差减少了 10.1%。

**关键词:** 非均匀采样; 滑动滤波; 频谱分析; 傅里叶分析

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 0258-7998(2010)12-0075-03

## A method of moving average filtering for non-uniformly sampled signals

GAO Yu Kai, ZHENG Shuang Yan

(Department of Physics and Electrical Information Engineering, Daqing Normal University, Daqing 163712, China)

**Abstract:** This paper presents two new methods for the analysis and the process of non-uniformly sampled signals. During the process of practical sampling, the spectrum estimation from non-uniformly sampled signals is obtained by continuous Fourier transform. A method of moving average filtering for non-uniformly sampled signals is given. In the research, non-uniformly sampled signals is represented as the algebraic addition of impulse function. The spectrum character of non-uniformly sampled signals is gotten through unevenly sampling. The moving average filtering method for non-uniformly sampled signals is based on different sampling interval. The validity of this method has been verified by simulation experiments. This developed technique can be applied in the processing of laser gyroscope output signal and the laser gyro bias error is reduced by 10.1% compared with traditional average filter.

**Key words:** non-uniformly sampled; moving-average filters; spectrum estimation; Fourier analysis

目前的数字信号处理几乎都是基于均匀采样来描述信号特征, 但在许多实际的数据采集系统中, 如激光陀螺捷联惯导系统和多路 A/D 转换电路中, 由于采用整周期采样技术或由于时钟脉冲的不稳定性, 造成采样时间间隔是非均匀的。在进行谱分析和数字信号处理时, 由于引入了时间归一化过程, 采样序列的自变量以整数形式给出, 没有任何关于非均匀采样时间间隔的信息, 这必然导致频谱分析及信号处理结果都存在误差。同时非均匀采样在整个频带范围内都会产生频谱噪声, 甚至可以淹没幅度小的信号频谱, 使得检测和幅度小的信号较为困难。

国内外学者对非均匀采样信号的处理方法进行了深入的研究, JENQ Y. C. 最早用分析的方法研究了非均

匀理想抽取正弦信号的频谱问题<sup>[1]</sup>, 其基本思路是将非均匀采样序列用  $M$  个均匀的采样序列组合来表示, 并建立非均匀采样序列的离散频谱和原来信号模拟频谱之间的关系。在此基础上参考文献[2]讨论了非均匀采样信号的频谱分析方法, 从数学期望的角度证明了该方法的正确性。参考文献[3-5]深入研究了非均匀采样信号数字谱, 并给出了非均匀采样周期信号的数字谱表达式。在滑动滤波方面, PELED A 讨论了滑动滤波在信号处理中的应用及其可行性<sup>[6]</sup>。虽然这些卓有成效的研究成果大大促进了非均匀采样信号分析理论的发展, 但只适用于多个周期采样的叠加情况, 同时对非均匀采样信号的滤波问题还有待研究。

本文深入研究了非均匀采样信号的数字谱, 得到了非均匀采样信号数字谱计算的表达形式, 提出了非均匀采样信号的滑动滤波方法。应用非均匀采样信号的谱分

\* 基金项目: 黑龙江省普通高等学校青年学术骨干支持计划项目(1154G56); 大庆师范学院博士科研启动项目(08ZB01)

# 测控技术与仪器仪表 Measurement Control Technology and Instruments

析方法和滑动滤波方法,分析了激光陀螺输出信号的谱特性,并有效地减少了激光陀螺的零偏信号。

## 1 非均匀采样信号的频谱分析

连续时间信号  $x(t)$  的频谱  $X(f)$  通常被定义为:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (1)$$

因为无法获得信号从  $-\infty$  到  $\infty$  所有时刻的真实值,因此在实际工程分析中并没有采用定义(1)所阐述的方法求信号的频谱。实际的处理是用一个窗函数(如矩形窗)对信号进行截取。不失一般性,本文把时间限制在  $T_0$  的宽度内,并且假设使用矩形窗进行截断。为了便于计算机的计算,需要对  $x(t)$  进行离散化,用有限数据长度为  $N$  的采样值代替连续时间信号  $x(t)$ ,如果在观测时间内是时间均匀采样,则采样频率为  $f_N = N/T_0$ ,而对于非均匀  $N$  点采样,用集合  $\{t_1, t_2, \dots, t_N\}$  代表采样时刻,并用 Dirac 冲激函数描述,这样就可以用采样信号的频谱来近似表示连续信号的频谱:

$$X_s(f) = \int_0^T \sum_{n=0}^N x(t_n) \delta(t-t_n) e^{-j2\pi ft} dt = \sum_{n=1}^N x(t_n) e^{-j2\pi ft_n} \quad (2)$$

式(2)得到的频谱在频域是连续的,不适宜在计算机处理,为此需要对频域离散化。

在时域上把非均匀采样的  $N$  点按周期  $T_0$  进行周期延拓,即把该区间内的波形平移  $nT_0$  后叠加到原波形处形成周期波形。由于周期延拓中的搬移可以通过与  $\delta(t-nT_0)$  的卷积来实现,因此周期延拓后的波形在数学上可以表示为原始波形与冲激串序列的卷积,其结果具有离散谱。周期延拓信号为:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_s(t) &= \left[ \sum_{n=0}^{N-1} x(t_n) \delta(t-t_n) \right] * \left[ T_0 \sum_{v=-\infty}^{\infty} \delta(t-vT_0) \right] \\ &= T_0 \sum_{v=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} x(t_n) \delta(t-t_n-vT_0) \end{aligned} \quad (3)$$

经过上式处理后,信号  $\tilde{x}_s(t)$  是周期信号,可以展开成傅里叶级数的形式:

$$\tilde{x}_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j2\pi kt/T_0} \quad (4)$$

其中傅里叶系数为:

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \tilde{x}_s(t) e^{-j2\pi kt/T_0} dt = \sum_{n=0}^{N-1} x(t_n) e^{-j2\pi kt_n/T_0}$$

对周期信号(4)进行傅里叶变换,可以得到连续函数  $x(t)$  的  $N$  个抽样值  $k=0, 1, \dots, N-1$ ,这  $N$  个点的离散傅里叶变换为:

$$X_s\left(\frac{k}{T_0}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x(t_n) e^{-j2\pi kt_n/T_0} \quad (5)$$

这样,经过时域抽样、截断和周期延拓后,在  $N$  个非均匀时间抽样值与  $N$  个频率抽样值之间建立了联系,而

且经过处理后的新信号的傅里叶变换  $X_s(k/T_0)$  可以看成是原信号傅里叶变换的近似。

## 2 非均匀采样信号的滑动滤波方法

对于等间隔时间  $\Delta T$  的采样信号序列,滑动平均滤波法就是连续取  $N$  次采样值进行算术平均,其数学表达式是:

$$y(t_n) = \frac{1}{N \cdot \Delta T} \sum_{i=n-N+1}^n x(t_i) \cdot \Delta T = \frac{1}{N} \sum_{i=n-N+1}^n x(t_i) \quad (6)$$

式中,  $y(t_n)$  为在  $N \cdot \Delta T$  时间内  $N$  个采样值的算术平均;  $x(t_i)$  为第  $i$  个采样值,  $\Delta T$  为采样时间间隔。

从数字信号处理的角度,滑动平均就是一个非递归的 FIR 数字滤波器,当用于实时数字滤波时,窗口里的平均值只能作为末点的输出值输出,第  $n$  时刻输出序列是将输入序列在第  $n$  时刻前的  $N$  个采样值平均求得的。

对于非均匀采样序列  $\{x(t_0), x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_{N-1}), \dots, x(t_n)\}$ ,由于采样时间间隔并不相等,时间长度为  $T$  的非均匀采样信号滑动滤波器重新定义为:

$$y(t_n) = \frac{1}{T} \sum_{i=n-N+1}^n x(t_i) \cdot (t_{i+1} - t_i) \quad (7)$$

非均匀采样信号可以看作宽度为  $\tau_i$ ,幅度为 1 的矩形脉冲函数通过平移和展缩而得到的代数和:

$$g_{\tau}(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases} \quad (8)$$

其频谱函数为:

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g_{\tau}(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{2 \sin(\frac{\omega\tau}{2})}{\omega} \quad (9)$$

由傅里叶变换的时移特性可知,经过时移  $t_0$  的矩形脉冲函数的傅里叶变换为  $g_{\tau}(t-t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0} G(j\omega)$ ,这样,非均匀采样信号经过滑动滤波器后,信号的频谱为:

$$Y(j\omega) = \frac{2}{T} \sum_{i=0}^{N-1} e^{-j\omega t_i} \frac{\sin(\frac{\omega(t_{i+1}-t_i)}{2})}{\omega} x(t_i) \quad (10)$$

非均匀采样信号滑动滤波器的频谱计算如图 1 所示。从图 1 可以看到滑动平均滤波相当于一个低通滤波器,衰减了较高频率的信号,对数据起到了平滑作用。图中实线为滑动窗口宽度,虚线为的振幅函数曲线,窗口越宽通带越窄。

利用这个特点,通过合理设置窗口宽度,可以在抑制噪声的同时尽可能保存信号,从而达到提高信噪比的目的。从另一个角度来看,滑动窗口内的数据在求平均时,由于噪声是随机的,不会积累,而信号会积累,所以信号得以突显出来。

## 3 仿真实证

MATLAB 作为数值分析和信号处理软件,已广泛应用于科学研究和工程实践中解决各种实际问题。本文利《电子技术应用》2010 年第 36 卷第 12 期

## 测控技术与仪器仪表 Measurement Control Technology and Instruments

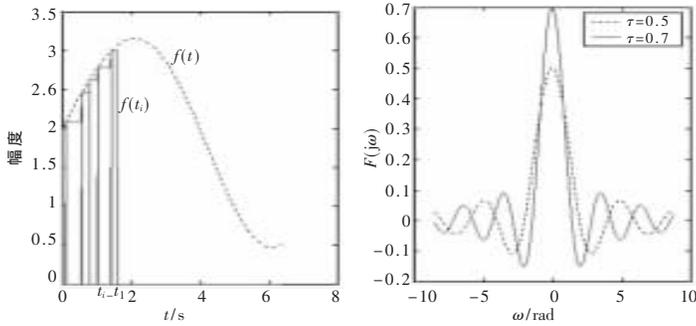


图1 非均匀采样信号滑动滤波器的频谱计算方法

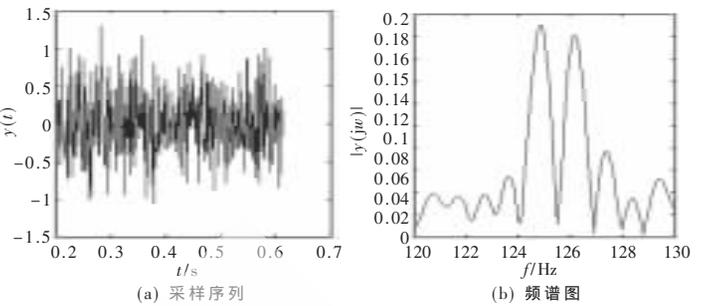


图2 非均匀采样正弦信号采样序列及其频谱图

用 MATLAB 数据处理功能对非均匀采样信号的数字谱进行计算分析,并且验证滑动滤波方法的有效性。

取非均匀采样时间间隔  $\tau_n = \{1.007, 0.996, \dots\}$  (单位为毫秒) 的 1024 个点正弦序列如图 2(a) 所示。

$$y(t_n) = 0.2 \sin(2\pi \times 125 \times t_n) + 0.2 \sin(2\pi \times 126 \times t_n) + v(t_n) \quad (11)$$

$$0 < t_n < 1024 \text{ ms}$$

式(11)中,  $v(t_n)$  为强度是 0.4 的随机白噪声。

这一组数据较采样周期是 1 ms 的均匀采样,在采样时间上的波动不到百分之一,因为频率分辨率  $\Delta f \approx \frac{1}{\sum t_n}$ ,应用均匀采样的快速傅里叶变换无法从频谱图中区分  $f_1 = 125 \text{ Hz}$  和  $f_2 = 126 \text{ Hz}$  的两个正弦信号。采用本文提出的非均匀采样信号的谱分析方法得到图 2(b),图中频率为 125 Hz 和频率为 126 Hz 的正弦信号得到了很好的区分。传统的快速傅里叶变换要想提高频率分辨率就要增加采样点数,但这样就增加了数据冗余性和计算的复杂性。

因此,基于非均匀采样的频谱算法在处理相同数据长度的采样数据时,可以提高频谱的频率分辨率。

利用式(7)对混有噪声的信号(式(9))进行 16 点滑动滤波处理,其误差均值和方差为 0.001 3、0.011 1,而采用常规的平均滤波法对非均匀采样信号进行滤波处理,误差均值和方差分别为 0.002 8、0.012 5,从而验证了本文提出的滑动滤波方法的有效性。

#### 4 非均匀采样信号滑动滤波方法在工程实践中的应用

激光陀螺是一种以量化脉冲的形式输出角增量的数字传感器,它的读出电路输出脉冲个数,每个脉冲对应着采样时间内的角增量。而当激光陀螺输出量化脉冲的整数倍时,测量信号的采样间隔不是固定不变的,这就造成了采样时间的非均匀性,因此激光陀螺的输出信号是非均匀时间采样下的正弦信号。激光陀螺的零偏误差是衡量其性能的主要技术指标,它的大小直接关系到捷联惯导

系统的稳定性和导航精度<sup>[7,8]</sup>。

图 3(a)为某型号激光陀螺整周期采样的零漂信号,其均值和标准差分别为 0.091 3 pulse/s 和 4.336 4 pulse/s,该零偏信号经过常规的平均滤波和本文提出的非均匀滑动滤波方法处理后,均值分别是 0.107 5 pulse/s、0.100 7 pulse/s,速率标准差分别是 0.245 3 pulse/s、0.220 4 pulse/s。从实验的结果可以看出,经过非均匀滑动滤波器后激光陀螺零偏的标准差得到有效的减少,误差标准差较常规方法减少了 10%。从经过滑动滤波处理后的数据可以准确估算出激光陀螺的随机游走系数为  $0.0064^\circ/\sqrt{h}$ 。

针对数字信号处理中的非均匀采样问题,本文提出了非均匀采样信号的频谱分析和滑动滤波方法。对非均匀采样信号的数字谱进行计算分析,得出传统的快速傅里叶变换要想提高频率分辨率就要增加采样点数,但这样就增加了数据冗余性和计算的复杂性,而基于非均匀采样的频谱算法在处理相同数据长度的采样数据时,可以提高频谱的频率分辨率。非均匀采样滑动滤波方法解决了采样间隔不均匀的问题,衰减了高频的信号,对

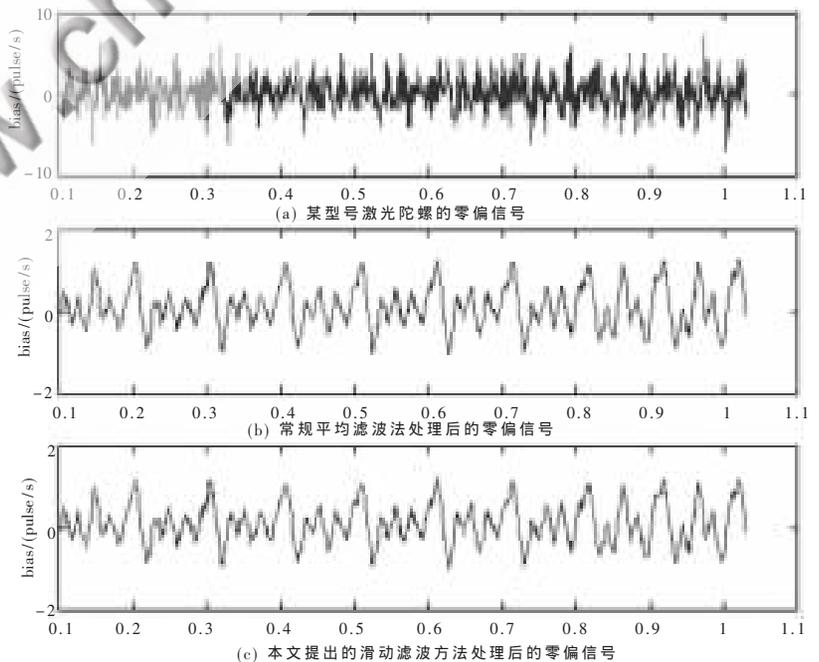


图3 工程实践应用结果

# 测控技术与仪器仪表 Measurement Control Technology and Instruments

数据起到了平滑的作用。把这一研究成果应用到机械抖动激光陀螺正弦抖动信号的分析滤波处理中,激光陀螺的零偏误差得到了有效的降低。

### 参考文献

[1] JENQ Y C. Digital spectra of non-uniformly samples signals: Fundamentals and high-speed waveform digitizers [J]. IEEE Trans. Instrum. Meas.,1988,37(2):245-251.

[2] TARCZYNSKI A, VALIMAKI V,CAIN G D. FIR filtering of non-uniformly sampled signals [J]. IEEE Inter. Con. On Assp, 1997(3):2237-2240.

[3] OUAHABI A,DEPOLLIER C, SIMON L,et al. Spectrum estimation from randomly sampled velocity data[J]. IEEE Transactions on Instrument and Measurement, 1998,47(4): 1005-1012.

[4] JENQ Y C. Digital-to-Analog(D/A) converters with non-uniformly sampled signals[J]. IEEE Transactions on Instru-

mentation and Measurement, 1996,45(1):56-59.

[5] LIN Y P, VAIDYANATHAN P P. Periodically non-uniform sampling of band pass signals [J]. IEEE Trans. Circuits and Systems. 1998(3):340-351.

[6] PELED A, LIU B. Digital signal processing,theory,design, and implementation. New York: John Wiley,1976:20-27.

[7] 高玉凯,邓正隆.消除机械抖动激光陀螺闭锁误差的方法[J].中国激光,2007,34(3):354-358.

[8] 高玉凯,邓正隆.改善机抖温度特性提高激光陀螺检测精度的方法研究[J].系统仿真学报,2007,19(14):3297-3330.

(收稿日期:2010-07-30)

### 作者简介:

高玉凯,男,1970年生,副教授,博士,主要研究方向:光电子技术及信号处理方法。

