一种构造压缩感知测量矩阵的新方法

刘晓静[1]，唐加山[2]

(1.南京邮电大学 通信与信息工程学院，江苏 南京 210003；

2.南京邮电大学 理学院，江苏 南京 210023)

摘 要： 压缩感知理论是近年来针对稀疏信号提出的一种新的信号处理理论。该理论的主要创新之处在于对信号采样和压缩是同时进行的。测量矩阵是实现该创新点的关键步骤之一，其性能直接关系着信号能不能精确重构。利用行列式非零的对角矩阵的正交性，结合正交基线性表示理论，提出了一种新的更简单的测量矩阵的构造方法。通过实验仿真，验证了新矩阵具有较好的性能。

关键词： 压缩感知；测量矩阵；对角阵；正交基线性表示

中图分类号： TN911.7 **文献标识码：** A **文章编号：** 1674-7720(2014)04-0074-03

A new method to construct measurement matrix based on compressed sensing

Liu Xiaojing[1]，Tang Jiashan[2]

(1.College of Telecommunications & Information Engineering，Nanjing University of Posts and Telecommunications，Nanjing 210003，China；

2.College of Science，Nanjing University of Posts and Telecommunications，Nanjing 210023，China)

Abstract： Compressed sensing theory which is proposed recently for sparse signal is a new theory used in signal processing area. It′s main innovation is to sample and compress signal at the same time. Measurement matrix is one significant step to implement the innovation, and it′s property has a direct effect on the result of signal reconstruction. This essay proposed a new simple method to construct the measurement matrix ，utilizing the orthogonality of diagonal matrix with its determinant of non-zero value，and linear representation theory of orthogonal basis. Simulation result proves that the new matrix has a good performance.

Key words： compressed sensing；measurement matrix；diagonal matrix；linear representation theory of orthogonal basis

压缩感知(compressed sensing)理论是一种对信号中包含的信息进行采样的信号处理理论，旨在突破传统奈奎斯特采样定理关于对采样带宽的要求，并且实现信号采样与压缩同时进行，节省了带宽与存储资源，降低了硬件压力，故一经提出，就受到了信号处理领域研究人员的广泛关注。具体思路是：当信号具有稀疏性或可压缩时，就可以映射到一个低维空间，获取少量的信息采样值，再通过特定重构算法恢复原信号。理论主要研究3个核心问题：信号稀疏表示、测量矩阵和重构算法。其中测量矩阵对信号的重建精度有着直接的影响，测量矩阵性能越好，重建信号与原信号间偏差越小，恢复度越高[1]。因此，研究测量矩阵的构造有很重要的现实意义。

1 压缩感知理论简介

设 x 是 R^N 空间的一个 $N\times1$ 维列向量，若该向量中仅包含 K 个非零值，或者 x 在 N 维空间的某个变换基 Ψ 下的系数向量中仅有 K 个非零值，且 $K<<N$，则称 x 为 K-稀疏信号或变换域 Ψ 下的 K-稀疏信号。这 K 个非零值和它们的位置可以表示信号 x 的全部信息。

测量矩阵对信号采样与压缩是通过用一个行数 M 远小于列数 N 的 $M\times N$ 维测量矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 与信号 x 相乘，得到信号在该矩阵下的低维映射 y 实现的，只要 $M\geqslant K$，即可将信号 x 中所含的信息完全映射到 y 中去，同时完成对信号的采样与压缩。测量矩阵不仅要用于信号的采样与压缩，信号的重构过程同样依赖于测量矩阵。CANDÈS等在参考文献[2]中指出只要测量矩阵满足有限等距约束特性 RIP(Restricted Isometry Principle)，即：

$$(1-\varepsilon_K)\|S\|_2\leqslant\|\boldsymbol{\Phi}S\|_2\leqslant(1+\varepsilon_K)\|S\|_2 \tag{1}$$

就能够保证准确重建原信号。其中常数 ε_K 称为 K 阶 RIP 常数，S 为信号的稀疏表示。为了方便实际应用，参考文献[3]给出了测量矩阵满足式(1)的 3 个等价特征：

(1)测量矩阵的列向量组成的子矩阵的最小奇异值应大于一定的常数，即列向量满足一定的线性独立性；(2)测量矩阵的列向量要体现出某种类似噪声的独立随机性；(3)满足稀疏度的解是满足 l_1 范数最小的向量。

由于 $M<<N$，所以不能直接通过求解测量过程的逆问题得到 x。一般信号重建过程可以转化为解 l_0 范数下的最优化问题[4]。

2 基于正交基线性表示测量矩阵设计及对角阵

测量矩阵的设计主要是围绕上文中 RIP 特性的 3 个等价特征设计的。目前研究的测量矩阵主要分为：(1)随机测量矩阵，主要包括高斯随机矩阵[5]、贝努利矩阵[6]等；(2)确定性测量矩阵，主要包括多项式矩阵[7]等；(3)部分随机测量矩阵，包括部分哈达玛矩阵[6]、托普利兹矩阵[8]、轮换矩阵[6]、广义轮换矩阵[9]等；(4)基于正交基线性表示矩阵，如基于正交基线性表示的哈达玛改进矩阵[10]。

$M\times N$ 测量矩阵最多仅有 M 个最大无关列向量组，即 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{\Phi})\leqslant M$，也就是说测量矩阵的列向量相互间不可能都是线性无关。为了满足 RIP 特性，在设计测量矩阵时，应尽可能减少列向量之间的相关性。分析随机测量矩阵、确定性矩阵、部分随机测量矩阵发现，它们的构造过程都带有一定的随机性，不能保证 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{\Phi})=M$，即不能定量地保证列向量间尽可能大的非相关性。另外如部分哈达玛矩阵等部分随机测量矩阵的构造，先构造高维方阵，再从中选取 M 行的做法，在 M 值较小时会产生存储资源浪费[11]。因此本文主要研究基于正交基线性表示矩阵。

该矩阵的具体构造过程为：取 M 维空间中的一组正交基 $\boldsymbol{V}=\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_M\}$，其中 $\boldsymbol{v}_i(i=1,2,\cdots,M)$ 是 $M\times 1$ 维列向量。再由该正交基线性表示其余 $N-M$ 个列向量：

$$\boldsymbol{\eta}_j=k_{j,1}\boldsymbol{v}_1+k_{j,2}\boldsymbol{v}_2+\cdots+k_{j,M}\boldsymbol{v}_M \tag{2}$$

其中 $j=M+1,M+2,\cdots,N$。再合并正交基与线性表示出的向量，得到：

$$\boldsymbol{\Phi}=\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_M,\boldsymbol{\eta}_{M+1},\boldsymbol{\eta}_{M+2},\cdots,\boldsymbol{\eta}_N\}$$

$\boldsymbol{\Phi}$ 即为最终的测量矩阵。由于 $\boldsymbol{V}$ 为线性空间的一组正交基，$\mathrm{rank}(\boldsymbol{V})=M$，它为 M 维空间中的一个最大线性无关列向量组，同时，V 作为测量矩阵的一部分，也使得 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{\Phi})=M$。那么这 M 个列向量与其余 $N-M$ 个向量及其余向量之间的线性关系怎么保证呢？已知，若式(2)中线性表示系数全不为零，就能保证生成的列向量与正交基中的任意 $M-1$ 个列向量线性无关。而其余 $N-M$ 个列向量之间的线性相关性可转化为线性表示系数列之间的相关性。可以通过随机数生成线性表示系数，保证其余 $N-M$ 各列向量之间尽可能大的非相关性。为实现系数的非零性与最大非相关性，本文采用了一种随机均匀分布在不包含零点区间(如区间[1,2])的随机数产生系数矩阵，这样就保证了测量矩阵列向量间尽可能大的线性无关性。最后，将测量矩阵归一化，使其更好地满足 RIP 特性。

基于正交基线性表示的哈达玛改进矩阵(以下称为改进的哈达玛矩阵)即是用这种方式构成的测量矩阵。它的正交基选用的是哈达玛矩阵。该方法为了克服哈达玛矩阵对信号维数的限制，提出了可以先产生一个 $L\times L$ 维哈达玛矩阵(L 为大于 M 的最小的 2 的幂)，然后利用正交基线性表示法产生 $L\times N$ 维矩阵，再从中任取 M 行作为最终测量矩阵。此时，由于基于正交基线性表示测量矩阵间良好的列相关性是在 $L\times L$ 维哈达玛矩阵上产生的，当 $M\neq 2^K$ 时，不能保证从 $M+1$ 列开始之后的任何一列与前 M 列中的任意 $M-1$ 个列向量线性无关；另外随机取 M 行作为最终测量矩阵，一方面给硬件实现造成压力，另一方面将不可避免地造成存储资源的浪费，说明基于正交基线性表示的哈达玛改进矩阵仍未能很好地解决维数所带来的局限性。

对角阵(diagonal matrix)是一种主对角线之外的元素皆为 0 的特殊矩阵。对角线上的元素可以为 0 或其他值。因此对于对角阵 $\boldsymbol{D}=\{\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\cdots,\boldsymbol{d}_M\}$，当 $i\neq j$ 时，有：

$$\boldsymbol{d}_i^{\mathrm{T}}\times \boldsymbol{d}_j=0$$

$\boldsymbol{D}$ 的转置矩阵 $\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}$ 也满足同样的等式，即对角阵的行向量与列向量之间具有与哈达玛矩阵同样的正交性。当对角线上的元素全是非零值时，则 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{D})=M$，此时，该矩阵的列向量与行向量之间均是线性不相关的，可以作为基于正交基线性表示测量矩阵中的正交基，再利用正交基线性表示方法构造新的测量矩阵——基于对角阵线性表示测量矩阵。矩阵的具体构造过程如下：

(1)生成一个全为非零元素的 $1\times M$ 维行向量 $\boldsymbol{U}$，再由这个行向量构成 $M\times M$ 维对角阵 $\boldsymbol{V}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{U})$；

(2)采用均匀分布在[1,2]区间上的随机数生成 $M\times(N-M)$ 维线性表示系数矩阵；

(3)将步骤(2)生成的 $N-M$ 个系数列向量与步骤(1)中的对角阵相乘，获得测量矩阵中其余的 $N-M$ 个列向量。合并对角阵与这 $N-M$ 个列向量，得到测量矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$。为了保证测量矩阵满足 RIP 特性，对列向量进行归一化后得到最终的测量矩阵。

由以上基于对角阵线性表示测量矩阵的构造过程可知，该矩阵的构造方法避免了改进的哈达玛矩阵方法中维数的影响，保证了 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{\Phi})=M$，同时，采用非零随机数构成线性表示系数矩阵，更好地保证了测量矩阵列向量间尽可能大的非相关性。另外，没有舍弃矩阵行的现象，不会造成存储资源的浪费。

3 仿真实验结果

为了检验新方法构造矩阵的性能及相关理论的正确性，采用 Matlab 标准图像库中 256×256 lena 图像进行仿真实验。先用典型的 sym8 小波生成离散小波变换基对图片进行稀疏处理，再分别用新矩阵、基于正交基线性表示的哈达玛改进矩阵及一些常用测量矩阵对信号进行测量，最后选择基于最小 l_0 范数的正交匹配追踪算法 OMP[12](Orthogonal Matching Pursuit)对图片进行重构。在 $M/N<0.5$ 时，仿真结果如图 1 所示。

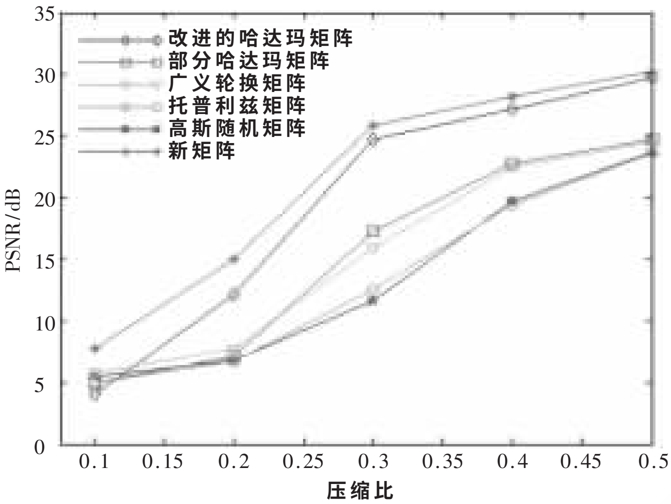

图 1 常见测量矩阵恢复图像峰值信噪比比较

由仿真图可以看出，基于正交基线性表示的测量矩阵性能要优于其他常用测量矩阵，当压缩比 M/N=0.5 时，新矩阵的 PSNR（峰值信噪比）为 30.287 2 dB，改进的哈达玛矩阵为 29.742 7 dB，而其他常用矩阵的 PSNR 均不到 24 dB。另外分别比较压缩比为 0.1、0.2、0.3、0.4 时新矩阵与改进的哈达玛矩阵的 PSNR 值，可以看出，新矩阵的 PSNR 值均高于改进的哈达玛矩阵值，尤其是在压缩比为 0.2 时，差值达到了 3 dB。图 2 给出了在压缩比为 0.4 时，新矩阵与改进的哈达玛矩阵恢复性能对比，从视觉效果上能够看出新矩阵能以更高的恢复率恢复出原始信号。

(a)新矩阵恢复图　　(b)改进的哈达玛矩阵恢复图

图 2 M/N=0.4 时，新矩阵与改进哈达玛矩阵恢复图

图 3 给出了在压缩比为 0.5 时，新矩阵恢复效果图，与原始图已经没有多大差别，进一步验证了新矩阵优良的性能。

本文旨在研究测量矩阵，在基于正交基线性表示矩阵理论的基础上，结合对角矩阵的行向量和列向量之间良好的正交性，构造矩阵时没有维数限制等性质，提出了一种新的测量矩阵构造方法，即基于对角阵线性表示测量矩阵。该矩阵可以尽最大可能保证列向量间的非相关性。实验选用二维图像进行仿真，并对多种测量矩阵进行实验对比，实验结果验证了新矩阵的可行性与优越性。

(a)原始图　　(b)M/N=0.5 时新矩阵恢复图

图 3 M/N=0.5 时，新矩阵恢复性能效果图

参考文献

[1] 吴海佳，张雄伟，陈卫卫.压缩感知新技术专题讲座(二)[J].军事通信技术，2012，33(1)：90-94.

[2] CANDÈS E，TAO T.Near optimal signal recovery from random projections：universal encoding strategies[J].IEEE Trans.Inform.Theory，2006，52(12)：5406-5425.

[3] DONOHO D.Compressed sensing[J].IEEE Trans.Inform.Theory，2006，52(4)：1289-1306.

[4] CANDÈS E，WAKIN M.An introduction to compressive sampling[J].IEEE Signal Processing Magazine，2008(25)：21-30.

[5] DONOHO D，TSAIG Y.Extensions of compressed sensing[J].Signal Processing，2006，86(3)：533-548.

[6] CANDÈS E.The restricted isometry property and its implications for compressed sensing[J].C.R.Math.Acad.Sci，2008，346(9-10)：589-592.

[7] DEVORE V.Deterministic constructions of compressed sensing matrices[J].Journal of Complexity，2007，23(4-6)：918-925.

[8] RAUHUT H.Circulant and toeplitz matrices in compressed sensing[J].In Processing SPARS'09，2009，2(13)：1124-1132.

[9] 李浩.用于压缩感知的确定性测量矩阵研究[D].北京：北京交通大学，2011.

[10] 马庆涛.基于压缩感知的信号重构算法研究[D].南京：南京邮电大学，2013.

[11] 李树涛，魏丹.压缩传感综述[J].自动化学报，2009，35(11)：1-7.

[12] TROPP J，GILBERT A C.Signal recovery from partial information via orthogonal matching pursuit[J].IEEE Transactions on Information Theory，2007，53(12)：4655-4666.

(收稿日期：2013-08-22)

作者简介：

刘晓静，女，1990 年生，硕士研究生，主要研究方向：现代通信中的智能信号处理。

唐加山，男，1968 年生，博士，教授，硕士研究生导师，主要研究方向：随机数学，现代通信中的智能信号处理。