

论叠加定理在线性电路中的应用范围*

刘红¹,符晓玲^{1,2},王超¹

(1.昌吉学院 物理系,新疆 昌吉 831100;

2.山东大学 控制科学与工程学院,山东 济南 250061)

摘要: 叠加定理在使用中一般只局限于简单的直流电路的电压和电流计算,以及非正弦周期电流电路的电压电流的计算。全面阐明了在线性直流电路、正弦交流电路和非正弦周期电流电路中,叠加定理能否适用计算电压、电流和功率,以及不适用计算的原因。

关键词: 叠加定理;线性电路;电压;电流;功率

中图分类号: TM131

文献标识码: A

文章编号: 1674-7720(2013)13-0073-03

The superposition theorem in linear circuit applications

Liu Hong¹,Fu Xiaoling^{1,2},Wang Chao¹

(1.Physics Department of Changji University,Changji 831100,China;

2.School of Control Science and Engineering,Shandong University,Ji'nan 250061,China)

Abstract: Superposition theorem in use is generally confined to simple DC circuit voltage and current is calculated, and the non sinusoidal periodic current circuit of the voltage and current are calculated. This paper Comprehensively illustrates whether the superposition theorem can be applied to calculate the voltage, current and power, as well as inapplicable reason in linear DC circuit, sine alternating current circuit and the nonsinusoidal period current circuit.

Key words: superposition theorem; linear circuit; voltage; electric current; power

叠加定理是线性电路的重要定理之一,在线性电路分析中占有非常重要的地位。其基本内容是^[1-3]:任一线性电路中任一支路的电流或电压等于电路中各个独立电源单独作用时,在这个支路所产生的电流或电压的代数和。定理指明了它适用于计算电路中的电压和电流,但在分析正弦交流电路时,需要计算电压和电流的瞬时值和相量值^[4],确定这两者是否都可以使用叠加定理进行计算。线性电路还包括非正弦周期电流电路,它的电压和电流的瞬时值和相量值是否也可用叠加定理进行计算。定理中没有提到功率的计算,在分析电路中功率和电压、电流都是重要的参数,那么功率的计算是否也可用叠加定理。本文就以上问题进行进一步的探讨。

1 线性直流电路

1.1 电压和电流

叠加定理一般都是在直流线性电路分析中引出,因此用于计算直流线性电路的电压和电流肯定是成立的。

1.2 功率

在直流电路中的负载为电阻,电阻的功率计算公式为:

$$P=UI=I^2R=\frac{U^2}{R} \quad (1)$$

假设电阻上的电压和电流为两个独立源作用的叠加,即 $U=U'+U''$, $I=I'+I''$, 则 $P'=U'I'$, $P''=U''I''$, 但:

$$P=UI=(U'+U'')(I'+I'')=U'I'+U'I''+U''I'+U''I'' \neq P'+P''$$

显然用分功率的叠加失去了交叉乘积项 $U'I''$ 和 $U''I'$, 同样用式(1)的另两个公式进行分析可以得出同样的结论,减少了交叉项。从式(1)还可看出功率与电压或电流的平方成线性关系,而不是与电压或电流的一次方成线性关系,这也可作为判断功率是否满足叠加原理的依据之一。总之,对于直流线性电路来讲叠加定理是不能用来计算功率的。

2 正弦交流电路

根据电路中激励频率不同可把电路分为两大类^[5],

* 基金项目: 昌吉学院科学研究基金项目(2011SSQD018)

技术与方法 Technique and Method

一类是单一频率正弦交流电路,另一类是不同频率交流正弦电路,它们对于叠加定理的适应也不相同,现分别阐述。

2.1 单一频率正弦交流电路

假设电路中含有两个同频率的正弦信号,则电路中响应的频率与信号源的频率相同,此时电路仍为单一频率电路。则阻抗 Z 上产生的电压和电流分别为:

$$u = \sqrt{2} U_1 \cos(\omega t + \phi_{u1}) + \sqrt{2} U_2 \cos(\omega t + \phi_{u2}) = u_1 + u_2$$

$$i = \sqrt{2} I_1 \cos(\omega t + \phi_{i1}) + \sqrt{2} I_2 \cos(\omega t + \phi_{i2}) = i_1 + i_2$$

2.1.1 电压和电流

由上分解式可以看出同频率正弦交流电路中,电压和电流的瞬时值的计算可以用叠加定理进行计算。而相量值由于电压和电流的分量的频率相同,则也可用叠加定理计算。即:

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 \quad (2)$$

$$\dot{i} = \dot{i}_1 + \dot{i}_2 \quad (3)$$

2.1.2 功率

瞬时功率

$$p = ui = (u' + u'')(i' + i'') = u'i' + u'i'' + u''i' + u''i'' \neq p' + p''$$

即瞬时功率不可用叠加定理进行计算。

根据有功功率的计算公式 $P = UI \cos \varphi$ ^[6]可以推出:

$$P = UI \cos \varphi = UI \cos \varphi_z = \frac{U^2}{|Z|} \cos \varphi_z = I^2 |Z| \cos \varphi_z \quad (4)$$

其中 φ 是电压和电流的相位差, φ_z 是阻抗 Z 的阻抗角。由式(4)可看出有功功率不是电压或电流的线性关系。因此单一频率正弦交流电路中叠加定理一般不适用有功功率的计算。这里也有特例,参考文献[7]中指出:在两个同频率的电源共同作用下的线性正弦交流电路中,如果这两个电源分别单独作用在某一支路上产生的两个电流的相位差为 90° 时,该支路的平均功率就可以用叠加定理进行计算。

2.2 不同频率正弦交流电路

当电路中含有不同频率的电源,根据叠加原理,两个不同频率的激励在线性电路中分别产生与其频率相同的响应,即电路中的每一响应均为两种频率的正弦量之和,即在阻抗 Z 上产生的电压和电流分别为:

$$u = \sqrt{2} U_1 \cos(\omega_1 t + \phi_{u1}) + \sqrt{2} U_2 \cos(\omega_2 t + \phi_{u2}) = u_1 + u_2$$

$$i = \sqrt{2} I_1 \cos(\omega_1 t + \phi_{i1}) + \sqrt{2} I_2 \cos(\omega_2 t + \phi_{i2}) = i_1 + i_2$$

2.2.1 电压和电流

由上分解式可以看出在不同频率正弦交流电路中,电压和电流的瞬时值的计算恰好是不同频率正弦交流电路的求解思路,所以电压和电流的瞬时值可以用叠加定理进行计算。不同频率的电源在电路中的响应电压和电流的频率也不相同,因此不能用叠加定理计算电压和电流的相量值。

2.2.2 功率

瞬时功率

$$p = ui = (u' + u'')(i' + i'') = u'i' + u'i'' + u''i' + u''i'' \neq p' + p''$$

即瞬时功率不可用叠加定理进行计算。

阻抗 Z 的有功功率 P 为:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T [\sqrt{2} U_1 \cos(\omega_1 t + \phi_{u1}) + \sqrt{2} U_2 \cos(\omega_2 t + \phi_{u2})] \\ &\quad [\sqrt{2} I_1 \cos(\omega_1 t + \phi_{i1}) + \sqrt{2} I_2 \cos(\omega_2 t + \phi_{i2})] dt \quad (5) \\ &= U_1 I_1 \cos \varphi_{z1} + U_2 I_2 \cos \varphi_{z2} \\ &= P_1 + P_2 \end{aligned}$$

由于不同频率的电压和电流产生的有功功率为零,则恰好使得叠加定理在计算不同频率正弦交流电路的有功功率成立。

3 非正弦周期交流电路

一般遇到的非正弦周期交流电路都符合狄里赫利条件,可以用傅里叶级数分解为直流部分,各种振幅和初相不同而频率为基波的整数倍的正弦量的叠加^[8],即把电压或电流分解为:

$$u = U_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{2} U_j \cos(k\omega t + \phi_{uk})$$

$$i = I_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{2} I_j \cos(k\omega t + \phi_{ik})$$

3.1 电压和电流

由上分解式可以看出在非正弦周期电流电路中,只有直流分量的频率均为零相同,而各次谐波的频率均不相同,因此只能叠加电压和电流的瞬时值,不能叠加电压和电流的相量值。

3.2 功率

瞬时功率 p 为:

$$\begin{aligned} p = ui &= \left[U_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{2} U_j \cos(k\omega t + \phi_{uk}) \right] \\ &\quad \left[I_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{2} I_j \cos(k\omega t + \phi_{ik}) \right] \quad (6) \end{aligned}$$

如使用叠加原理进行计算,则:

$$p = U_0 I_0 + \sum_{j=1}^{\infty} u_j i_j \quad (7)$$

显然式(6)、式(7)的计算结果不一致,即非正弦周期电流电路的瞬时功率的计算叠加定理不成立。

有功功率也称为平均功率,它是瞬时功率在一个周期内的平均值。即:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T p dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[U_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{2} U_j \cos(k\omega t + \phi_{uk}) \right] \\ &\quad \left[I_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{2} I_j \cos(k\omega t + \phi_{ik}) \right] dt \end{aligned}$$

$$= U_0 I_0 + \sum_{j=1}^{\infty} U_j I_j \cos(\phi_{uk} - \phi_{ik}) \quad (8)$$

其中 $\phi_{uk} - \phi_{ik}$ 是第 j 次谐波电压和电流的相位差。从式(8)可以看出, 只有频率相同的电压和电流才产生有功功率, 等于各次谐波单独作用时产生的有功功率的叠加, 即有功功率可用叠加定理进行计算。

本文对线性直流电路和线性交流电路关于叠加定理的使用范围和条件进行了分析, 通过讨论研究得出: 在线性直流电路中, 电压和电流的计算可以使用叠加定理, 但不能用于功率的计算; 对于正弦交流电路, 在单一频率的情况下, 电路中的电压和电流的瞬时值和相量值都可以使用叠加定理进行计算, 瞬时功率不适用叠加定理计算, 而有功功率一般不适用叠加定理来计算, 只有在两个同频率的电源共同作用下的线性正弦交流电路, 如果这两个电源分别单独作用在某一支路上产生的两个电流的相位差为 90° 时, 该支路的平均功率就可以用叠加定理进行计算; 对于不同频率正弦交流电路, 电路中的电压和电流的瞬时值可以使用叠加定理进行计算, 而相量值不适用叠加定理计算, 瞬时功率也不适用于叠加定理来计算, 有功功率可用叠加定理进行计算; 对于非正弦周期交流电路, 电路中的电压和电流的瞬时值可以使用叠加定理进行计算, 有功功率可用叠加定理进行计算。而相量值不可用叠加定理计算, 瞬时功率的计算也不能用叠加定理进行计算。以上结论总结见表1。

参考文献

[1] 邱关源. 电路(第5版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.

表1 叠加定理的适用范围

| | 电压和电流 | | 功率 | |
|------------|-------|-----|------|-------|
| | 瞬时值 | 相量值 | 瞬时功率 | 有功功率 |
| 线性直流电路 | 适用 | 适用 | 不适用 | 不适用 |
| 单一频率正弦交流电路 | 适用 | 适用 | 不适用 | 一般不适用 |
| 不同频率正弦交流电路 | 适用 | 不适用 | 不适用 | 适用 |
| 非正弦周期交流电路 | 适用 | 不适用 | 不适用 | 适用 |

- [2] 李翰荪. 电路分析基础 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.
- [3] 姚海彬. 电工技术 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.
- [4] 刘敏, 洪炜宁. 应用叠加定理分析电路问题应注意的问题 [J]. 广东水利电力职业技术学院学报, 2004(4): 15-16.
- [5] 孙宪君, 孙正风, 焦玉成, 等. 工程电路分析 [M]. 南京: 东南大学出版社, 2007.
- [6] 智海素, 黄盛兰, 田清华. 利用叠加定理计算平均功率的实用性探讨 [J]. 湖北大学学报(自然科学版), 2008, 30(2): 176-178.
- [7] 李弋, 杨丽君. 叠加定理适用范围的讨论 [J]. 锦州师范学院学报, 1999(6): 6-8.
- [8] 周凤献. 叠加定理在非正弦周期电流电路中的应用分析 [J]. 青岛化工学院学报, 2001, 22(4): 387-389.

(收稿日期: 2013-02-15)

作者简介:

刘红, 女, 1977年生, 硕士, 讲师, 主要研究方向: 智能控制技术, 电工电子技术。