理想梯形波的频域特性分析和能量有效带宽算法

王 慧

(上海贝尔股份有限公司,上海 201206)

摘 要: 针对 3 dB 有效带宽算法不足,提出了方波能量有效带宽的概念,并且给出了相关的算法。采用理想梯形波来代替方波。对非周期理想梯形波和周期理想梯形波分别进行了傅里叶变换和傅里叶级数展开得到了相应的频谱函数。再根据能量有效带宽的定义得到了相应的能量有效带宽算法公式。

关键词: 理想梯形波;频域特性;能量有效带宽

中图分类号: TP301.6　　文献标识码: A　　文章编号: 1674-7720(2013)13-0080-03

Frequency characteristics and energy effective bandwidth of ideal trapezium wave

Wang Hui

(Alcatel-Lucent Shanghai Bell Co., Ltd., Shanghai 201206, China)

Abstract: This paper finds it is only applied to a specific range. So a new concept of energy effective bandwidth and its corresponding defines is put forward. This paper uses ideal trapezium wave instead of square wave to simplify the problem. Then this paper transmits them to frequency domain by Fourier transform and Fourier expansion. Then a calculating formula of effective bandwidth is obtained of the ideal trapezoidal wave through the effective bandwidth defines.

Key words: ideal trapezium wave; frequency characteristics; energy effective bandwidth

理想的方波只有高和低两个值,分别对应着逻辑的“1”和“0”,它可以快速地从 0 切换到 1,也可以快速地从 1 切换到 0,因此被广泛地应用在同步数字电路里。理想方波在 0 和 1 之间切换是瞬间完成的,所需要的时间是 0,但是这在物理上是无法实现的。实际中的方波在 0 和 1 之间切换时需要时间,信号从 0 上升到 1 所花费的时间称为上升时间,信号从 1 切换到 0 所需要的时间称为下降时间。如果系统出现过阻尼,那么信号就永远不会达到的高和低两个值,如果系统出现欠阻尼,信号就会在高和低两个值附近振荡。在这两种情况下,就不能按照前面的方法来定义方波上升时间和下降时间,因此需要采用近似的方法来定义上升时间和下降时间。例如定义信号幅度从 10%上升到 90%的时间为上升时间,信号幅度从 90%到 10%的时间为下降时间,可以统一用 τ_{10-90} 来表示[1]。

在时域中,可以清楚地看到理想方波的周期、上升时间、动态特性、稳态响应等,但是光有这些是远远不够的,只有把它转化到频域中,才能更清楚地分析它的频谱结构、带宽、幅频特性、相频特性等。也许在时域中只是上升时间有一些细小的差异,但是在频域中可以观察到频谱结构、带宽等频域特性却发生了很大的变化[2],因此需要把理想方波转化到频域来分析。

在频域中,带宽是一个非常关键的指标。根据频域理论,任何时域的信号都可以转化成一系列正弦波的组合。带宽就是指这些正弦波中有效的最高正弦波的频率分量。对于理想方波,它的频率分量是无穷大的,但是在物理上这是无法实现的。所以要忽略一些幅度比较小的、对实际结果影响不大的一些频谱成分,用有限带宽内的频谱成分来近似它,这个有限带宽就是有效带宽。使用有效带宽既保证了物理方波里面包含了主要的关键的频谱成分,又可以将信号的带宽从无限大缩小到有限的范围内,有利于理想方波的近似实现。

对于有效带宽,可以有多种定义方法。根据定义不同会产生不同的有效带宽的算法。为了讨论问题的方便,通常使用理想梯形波来代替理想方波。传统的理论提出了 3 dB 有效带宽的定义,具体定义方法是以理想

梯形波的某次谐波分量的功率来衡量，如果该次谐波分量小于理想方波中相应频率分量的幅度功率的50%，或者电压幅度下降到70%，即差3 dB，则定义该次谐波频率分量就是有效带宽。根据这个理论，近似认为理想梯形波的5次谐波幅度约占理想方波5次谐波幅度的70%，因此认为5次谐波频率就是理想梯形波的有效带宽。根据3 dB有效带宽的定义可以得到理想梯形波的带宽和上升时间之间存在的简易关系 $BW=0.35/\tau_{10-90}$[3]。

经过研究发现，这个公式是非常粗略的，使用这个公式需要有两个隐含的前提：理想梯形波5次谐波分量和理想方波5次谐波分量幅度差3 dB；上升时间是时钟周期的7%。因此这个公式只适用于特殊理想梯形波的求解，对于一般性的理想梯形波不适用。假设有两个理想梯形波，它们的上升时间完全一样，但是周期相差很大，根据3 dB有效带宽的定义，可以得到它们的有效带宽是相同的。这显然是不合理的。另外理想梯形波的有效带宽仅由理想梯形波的频率成分中某次谐波频率来决定，这本身就很不严谨。

针对传统3 dB有效带宽定义的局限性，本文提出了能量有效带宽的概念。能量有效带宽是指能量有效的最高正弦波的频率分量。能量有效的前提是该带宽内的能量占频域总能量的95%以上。如果是周期函数，前提是该带宽内的功率占频域总功率95%以上。使用能量有效带宽的定义最大程度地保留了理想梯形波的主要成分，因为能量有效带宽内的能量占总能量的95%。而且在能量有效带宽的定义里面，充分考虑了所有频谱成分，它们都对最终的结果施加了自己的影响，因此定义更科学严谨。下面就是关于理想梯形波的频域分析和有效能量带宽的算法研究。

1 非周期理想梯形波频域与能量有效带宽计算

对于数据这样的数字信号来说，它与时钟信号不一样，大部分情况下，它的传输是突发性的，因此不能用一个连续的周期信号来代替它，更适合用单周期理想梯形波来表示。单周期理想梯形波在任意的有限区间上满足狄利赫利条件[4]，在$(-\infty,+\infty)$内绝对可积。所以单周期理想梯形波满足傅里叶变换条件，可以通过傅里叶变换把理想梯形波从时域转换到频域来分析它的幅频特性和相频特性。

1.1 非周期理想梯形波频域分析

在图1的单周期理想梯形波中，t轴是时间轴，v轴是电压幅度轴。整个理想梯形波由单个周期组成，占空比为50%。它的上升沿是线性的，如果定义幅度从10%到90%的时间为τ_{10-90}，那么幅度从0到1的上升时间就为$1.25\tau_{10-90}$。下降沿由于和上升沿对称，因此下降时间也是$1.25\tau_{10-90}$。

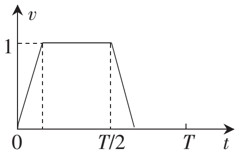

图1 单周期理想梯形波

可以得到$f(t)$的时域表达式：

$$f(t)=\begin{cases}0, & \dfrac{T}{2}+1.25\tau_{10-90}<t\\ 1-\dfrac{0.8}{\tau_{10-90}}\left(t-\dfrac{T}{2}\right), & \dfrac{T}{2}<t\leqslant\dfrac{T}{2}+1.25\tau_{10-90}\\ 1, & 1.25\tau_{10-90}<t\leqslant\dfrac{T}{2}\\ \dfrac{0.8t}{\tau_{10-90}}, & 0<t\leqslant 1.25\tau_{10-90}\\ 0, & t\leqslant 0\end{cases} \tag{1}$$

对$f(t)$进行傅里叶变换得到[5]：

$$F(\mathrm{j}w)=\frac{k\ \sin 0.625\tau w\ \sin\dfrac{T}{4}w}{\tau w^2}\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}(T+2.5\tau)w}{4}} \tag{2}$$

从式(2)可以得到幅频函数：

$$|F(\mathrm{j}w)|=\frac{k\ \sin 0.625\tau w\ \sin\dfrac{T}{4}w}{\tau w^2} \tag{3}$$

根据幅频函数可以画出幅频函数示意曲线，如图2所示。

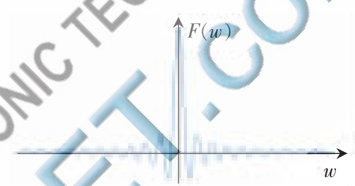

图2 非周期理想梯形波的辐频特性曲线

在图2中可以发现：非周期理想梯形波的频谱是连续的、无穷大的，整个曲线呈现阻尼振荡形态，当w趋向于无穷时，幅频函数会趋向于0；幅频函数会在$w=0$点取到最大值，极值为$T/2$；整个幅频函数曲线关于幅度轴对称。

从式(2)同时可以得到相频函数：$\varphi(w)=-(T+2.5\tau)w/4$，相频函数周期为$8\pi/(T+2.5\tau)$，初相位为0。

1.2 非周期理想梯形波能量有效带宽计算

首先计算频域总能量。根据定义频域总能量W_f的表达式：

$$W_f=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\mathrm{j}w)|^2\mathrm{d}w \tag{4}$$

W_f是数学上一类典型的定积分，它的原函数无法用初等函数来表示。因此直接求频域总能量是非常困难的。在这里将会用到帕塞瓦尔(Parserval)定理。帕塞瓦尔定理指出，一个信号所含有的能量恒等于此信号在完备正交函数集中各分量能量之和。它表明信号在时域的总能量等于信号在频域的总能量，即信号经傅里叶变换后其总能量保持不变，符合能量守恒定律。根据帕塞瓦尔定理，频域总能量的求解转化成时域总能量的求解。根据定义时域总能量W_t表达式：

$$W_t=\int_{-\infty}^{+\infty}[f(t)]^2\mathrm{d}t=\frac{T}{2}-\frac{1.25\tau}{3} \tag{5}$$

假设能量有效带宽为BW，根据能量有效带宽的定

APPLICATION OF ELECTRONIC TECHNIQUE www.ChinaAET.com

义得到能量有效带宽的能量和 W_{BW}：

$$W_{BW}=0.95\left(\frac{T}{2}-\frac{1.25\tau}{3}\right)=0.475T-\frac{1.187\ 5\tau}{3} \tag{6}$$

根据式(6)可以得到有效带宽 BW 与理想梯形波周期 T 和上升时间 τ_{10-90} 的关系式：

$$W_f=0.475T-\frac{1.187\ 5\tau}{3} \tag{7}$$

式(7)就是求解理想梯形波的能量有效带宽的精确公式。由于 W_f 是一个无穷级数列，其求解无法用人工完成，需要借助计算机的帮助才能完成。将式(7)编写成计算机的程序，由计算机来完成求解。求解结果的精度与 n 的取值息息相关，n 越大，计算结果越精确，但是带来的工作量也越大，导致运算时间也长；n 越小，计算结果误差越大，但是计算的工作量小，计算速度快。由于 $|F(w)|^2\geqslant 0$，所以 W_{BW} 是递增的，在运用公式进行计算时要选择合适的起始值。

2 周期理想梯形波谐波与能量有效带宽计算

对于时钟信号这些数字信号而言，它的信号是周期性的。周期理想梯形波不符合傅里叶变换条件，因此不能通过傅里叶变换来频域来对它进行分析。但是可以通过傅里叶级数来分析它的谐波分量特性。根据定义，只要满足狄利赫利条件就可以展开成傅里叶级数，周期理想梯形波满足狄里赫利条件，所以可以通过傅里叶级数展开成一个直流分量和一系列不同频率的正弦量的叠加。

2.1 周期理想梯形波谐波特性分析

周期理想梯形波是由多个单周期理想梯形波组成，如图 3 所示，它的周期为 T。

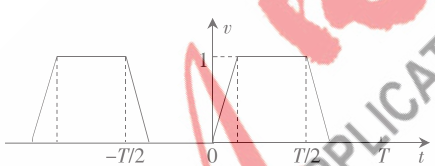

图 3 周期理想梯形波

可以得到 $f(t)$ 在 $[-T/2, T/2]$ 时间内的表达式如下：

$$f(t)=\begin{cases}1, & 1.25\tau<t\leqslant\frac{T}{2}\\ \frac{0.8\ t}{\tau}, & 0<t\leqslant 1.25\tau\\ 0, & -\frac{T}{2}+1.25\tau\leqslant t<0\\ 1-\frac{0.8}{\tau}\left(t+\frac{T}{2}\right), & \frac{T}{2}<t\leqslant-\frac{T}{2}+1.25\tau\end{cases} \tag{8}$$

把 $f(t)$ 展开成傅里叶级数形式：

$$f(t)=\frac{1}{2}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{kT}{\pi^2(2m+1)^2\tau}\sin\frac{1.25(2m+1)\pi\tau}{T}\sin\left[(2m+1)\frac{2\pi}{T}t-\frac{1.25(2m+1)\pi\tau}{T}\right] \tag{9}$$

从式(9)可以发现周期理想梯形波的傅里叶级数中不含偶次项谐波分量，仅含有直流分量和奇次项谐波分量。奇次谐波分量的幅度：

$$F_{2m+1}=\frac{kT}{\pi^2(2m+1)^2\tau}\sin\frac{1.25(2m+1)\pi\tau}{T} \tag{10}$$

从式(10)可以得到奇次项的谐波分量幅度与谐波分量的阶数和 τ/T 的比值有关。假设令 $r_{atio}=\tau/T$ 可以得到：

$$F_{2m+1}=\frac{kT}{\pi^2(2m+1)^2 r_{atio}}\sin 1.25(2m+1)\pi r_{atio} \tag{11}$$

当 r_{atio} 趋向 0 可以得到：

$$\lim_{r\to 0}F_{2m+1}=\frac{2}{\pi(2m+1)} \tag{12}$$

根据谐波分量幅度函数可以画出示意曲线，如图 4 所示。

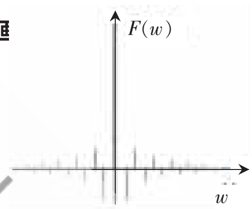

图 4 周期理想梯形波的谐波分量幅度特性曲线

在图 4 中可以发现：周期理想梯形波的频谱是离散的、无穷的，整个曲线呈现阻尼振荡形态，当 w 趋向于无穷时，幅频函数会趋向于 0；幅频函数会在 $w=0$ 点取到最大值，极值为 1/2；整个幅频函数曲线关于幅度轴对称。

从式(10)同时可以得到相频函数：$\varphi(t)=2\pi(2m+1)t/2T-1.25\pi\tau(2m+1)/T$，周期为 $T/(2m+1)$，初相位 $-1.25(2m+1)\pi\tau/T$。

2.2 周期理想梯形波能量有效带宽计算

周期梯形波是由一系列正弦波组成，它的谐波分量的幅度就是电压幅度，可以通过谐波分量的功率和来确定其带宽。

同样根据帕塞瓦尔定理、能量守恒、时域总能量和频域总能量相等，因此单个周期内时域平均功率与谐波功率和相等。根据定义时域平均功率 P_t 表达式：

$$P_t=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}[f(t)]^2\mathrm{d}t \tag{13}$$

将 $f(t)$ 带入，得到：

$$P_t=\frac{1}{2}-\frac{1.25\tau}{3T} \tag{14}$$

因此谐波总功率 $P_f=1/2-(1.25\tau)/3T$。假设能量有效带宽为 BW，根据能量有效带宽的定义得到能量有效带宽的谐波总功率 P_{BW}：

$$P_{BW}=0.95\left(\frac{1}{2}-\frac{1.25\tau}{3T}\right)=0.475-\frac{1.187\ 5\tau}{3T} \tag{15}$$

下面再根据谐波功率和来求 P_{BW}，建立 BW 与 P_{BW} 之间的函数关系：

$$2\sum_{m=0}^{l}\left|\frac{k}{\pi^2(2m+1)^2 r_{atio}}\sin 1.25(2m+1)\pi r_{atio}\right|^2=0.225-\frac{1.187\ 5\tau}{3T} \tag{16}$$

式(16)是一个无穷级数列，它的求解无法用人工完成，需要计算机的帮助才能完成。

本文针对现有方波 3 dB 有效带宽的定义及算法的不足，提出了能量有效带宽的定义及相应算法，可以有

APPLICATION OF ELECTRONIC TECHNIQUE www.ChinaAET.com

效提高方波有效带宽算法的精度及可靠性。另外通过对 3 dB 有效带宽的算法的深入研究，揭示了公式 $BW=0.35/\tau_{10-90}$ 的适用范围。当然，本文的算法由于用线性的梯形波上升/下降沿代替物理方波的上升/下降沿，其有效带宽会比实际带宽偏大。但是不会对有效带宽算法的精确度造成太大的影响，依然可以作为求解方波有效带宽的一种比较精确的算法。以后会进一步对能量有效带宽的算法进行完善，提高有效带宽的算法精度，为测试仪器的选择和滤波器设计提供重要参考。

参考文献

[1] Eric Bogatin.信号完整性分析[M].李玉山，李丽平，译.北京：电子工业出版社，2005.

[2] JOHNSON H，GRAHAM M. High-speed digital design[M]. New Jersey：Prentice Hall PTR，1993.

[3] JOHNSON H. High speed signal propagation[M].New Jersey：Prentice Hall PTR，2003.

[4] PROAKIS J G.数字通信(第4版)[M].张力军，译.北京：电子工业出版社，2003.

[5] 同济大学数学系.高等数学(第6版)[M].北京：高等教育出版社，2009.

(收稿日期：2013-04-08)

作者简介：

王慧，男，1976年生，硕士，高级工程师，主要研究方向：数字电路系统硬件设计和高速数字电路。

电子技术应用 APPLICATION OF ELECTRONIC TECHNIQUE www.ChinaAET.com