

基于压缩感知的测量矩阵研究

马庆涛¹, 唐加山²

(1.南京邮电大学 通信与信息工程学院, 江苏 南京 210003;

2.南京邮电大学 数理学院, 江苏 南京 210003)

摘要: 压缩感知打破了传统采样定理的限制, 提供了一种从少量的非自适应线性测量值中就能恢复原始信号的方法。测量矩阵正是获取这些测量值的关键所在, 寻求结构简单、性能稳定的测量矩阵一直是研究人员的目标。在介绍压缩感知测量矩阵的基础上, 提出了广义轮换矩阵的改进方法, 结合正交基线性表示的思想, 利用广义轮换构造的正交矩阵来生成新的测量矩阵。通过仿真实验, 证明了新的测量矩阵具有较好的性能。

关键词: 压缩感知; 稀疏信号; 测量矩阵; 广义轮换矩阵; 正交基

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1674-7720(2013)08-0064-04

Research on measurement matrix based on compressed sensing

Ma Qingtao¹, Tang Jiashan²

(1.College of Telecommunications and Information Engineering, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210003, China;

2.College of Science, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210003, China)

Abstract: Compressed sensing broke the limits of traditional sampling theorem, showed a new method to recover a signal from a small set of nonadaptive linear measurements. The measurement matrix is the key part of the measurements acquisition, seeking the measurement matrix with simple structure and stable performance is the goal of researchers. This article introduces the measurement matrices for compressed sensing and states a new improved method for generalized rotation matrix. And introduces a new measurement matrix which is generated by the orthogonal bases from the improved generalized rotation matrix. Finally, the simulation experiment proves that the new measurement matrix has better performance.

Key words: compressed sensing; sparse signal; measurement matrix; generalized rotation matrix; orthogonal bases

2004年, Donoho D^[1]和 Candès E^[2]等在泛函分析和逼近论的基础上, 结合信号稀疏表示理论提出了一个全新的信号采样理论, 即压缩感知 CS (Compressed Sensing)^[1-2]。与传统的 Nyquist 采样定律不同, 压缩感知同时完成了对信号的采样和压缩, 在信号的采样阶段就很好地避免了大量冗余数据的产生。压缩感知一经提出, 就引起人们的广泛关注, 在信息技术飞速发展的今天, 有着广阔的发展前景。在压缩感知理论中, 信号的采样速率不再取决于信号的带宽, 而是取决于信号本身的结构和特性(称为稀疏性, 或可压缩性)。其核心思想是: 当信号具有稀疏性或可压缩性时, 就可以通过一个非自适应的线性测量过程将原信号映射到低维空间, 得到少量的测量值, 然后通过求解一个稀疏最优化问题就可以

恢复原始信号。

总的来说, 压缩感知过程包括 3 个主要问题: 信号的稀疏表示、信号的线性测量和信号的重建。本文主要研究信号的线性测量, 并介绍压缩感知测量矩阵。

1 压缩感知理论框架

压缩感知的研究对象是稀疏信号, 考虑 R^N 空间中一个 $N \times 1$ 维的信号 x , 如果信号 x 仅有少量的非零分量, 或者说非零分量的个数 $K \ll N$, 就称信号 x 本身稀疏。然而现实中的信号大都本身并不稀疏, 信号的稀疏表示是寻找信号的一个稀疏变换, 将信号 x 投影到 R^N 空间中的一组标准正交基 $\{\psi_i | i=1, 2, \dots, N\}$ 上:

$$x = \sum_{i=1}^N \theta_i \psi_i \text{ 或者 } x = \Psi \theta \quad (1)$$

技术与方法 Technique and Method

其中变换系数 $\theta_i = \langle x, \Psi_i \rangle, i=1, 2, \dots, N; \theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N]^T$ 是一个 $N \times 1$ 维的变换系数向量, $\Psi = [\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_N]$ 是 $N \times N$ 维的变换矩阵。如果变换后向量 θ 中仅有 $K \ll N$ 个非零系数时, 则称信号 x 是 Ψ 域中的 K -稀疏信号, θ 是其稀疏变换。

压缩感知的测量过程是对稀疏信号同时进行采样和压缩。采样指将信号 x 投影到一个与变换矩阵 Ψ 不相关的测量矩阵 Φ 上, 压缩指测量过程完成了信号由高维到低维的映射, 即:

$$y = \Phi x \quad (2)$$

其中测量矩阵 Φ 是一个 $M \times N (M \ll N)$ 维矩阵, y 是压缩后的 $M \times 1$ 维的测量信号。将式(1)中的 $x = \Psi\theta$ 代入式(2), 有:

$$y = \Phi x = \Phi \Psi \theta = A \theta \quad (3)$$

其中 $A = \Phi \Psi$ 为 $M \times N$ 维的矩阵, 称为感知矩阵。

信号的重建是从 M 维的测量信号 y 恢复 N 维的原始信号 x , 由于 $M \ll N$, 直接求解式(2)的逆问题是一个病态问题, 无法求解。但是如果信号 x 具有稀疏性, 式(3)的 θ 中仅有 K 个非零系数, 只要满足 $M \geq K$, 即可以通过求解式(3)的逆问题得到稀疏变换信号 θ , 再代入式(1)就可以进一步恢复出原始信号 x 。

2 压缩感知测量矩阵

2.1 压缩感知测量矩阵介绍

压缩感知的测量过程是将 N 维稀疏信号 x 投影到测量矩阵 Φ 上面, 得到 M 维测量信号 y 。信号重建是从 M 维的测量信号 y 恢复 N 维的稀疏信号 x , 是求解一个欠定线性方程组的过程。如何才能保证得到唯一的稀疏解? Candès E^[3] 等人指出, 只要感知矩阵 A 满足如下形式的 RIP (Restricted Isometry Principle) 特性^[3], 就能保证解的存在和唯一性:

$$(1 - \varepsilon_K) \|x\|_2 \leq \|Ax\|_2 \leq (1 + \varepsilon_K) \|x\|_2 \quad (4)$$

其中常数 $\varepsilon_K \in (0, 1)$, 称为 RIP 常数。具有什么特征的测量矩阵才能保证感知矩阵 A 满足 RIP 特性? Donoho D 给出了测量矩阵的 3 个特征^[1]: (1) 测量矩阵的列向量组成的子矩阵的最小奇异值应大于一定的常数, 即列向量满足一定的线性独立性; (2) 测量矩阵的列向量要体现出某种类似噪声的独立随机性; (3) 满足稀疏度的解是满足 l_1 范数最小的向量。具有以上 3 个特征的矩阵都可以作为压缩感知测量矩阵。在这 3 个特征的指导下, 目前测量矩阵的设计主要有 3 类: 随机矩阵、确定性矩阵和部分随机矩阵。

(1) 随机测量矩阵: 如高斯矩阵^[1, 4]、贝努利矩阵^[4]等。随机矩阵可以用较少的采样值获得精确的重建, 但是随机测量矩阵自身存在的不确定性会给矩阵存储和硬件实现带来困难, 也会造成仿真实验的不确定性。

(2) 确定性测量矩阵: 如多项式测量矩阵^[5]等。相比随机测量矩阵, 确定性测量矩阵可以节省存储空间, 易于硬件实现, 也更易于设计快速算法, 但是其重建效果

较差, 精确重建需要的测量值较多。

(3) 部分随机测量矩阵: 如部分正交矩阵^[6]、部分哈达玛矩阵^[4]、托普利兹和轮换矩阵^[7]等。部分随机矩阵既有部分的随机性, 又兼具一定的确定性, 性能较好, 硬件实现也相对容易。

部分随机测量矩阵的构造方法主要有两种, 一是先生成一个 $N \times N$ 维的矩阵 Φ_0 , 然后再从中随机选取 M 行, 构成 $M \times N$ 维的测量矩阵 Φ , 如部分正交矩阵和部分哈达玛矩阵。二是先生成一个 N 维的行向量, 再由 N 维的行向量循环移位构造剩余的 $M-1$ 行, 得到 $M \times N$ 维的测量矩阵 Φ , 如轮换矩阵。广义轮换矩阵^[8]是轮换矩阵的改进, 也是一种性能较好的部分随机矩阵, 其构造方式是采用 $[1, -1]$ 作为向量原子, 随机生成长度为 N 的行向量作为测量矩阵的第一行, 采用依次循环的方式得到剩余的 $M-1$ 行, 且在构造剩余的 $M-1$ 行时, 对每次移到前端的元素都乘以一个固定的系数 $\alpha (\alpha > 1)$ 。矩阵形式如下:

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_n \\ \alpha c_n & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\ \alpha c_{n-1} & \alpha c_n & c_1 & \cdots & c_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha c_2 & \alpha c_3 & \alpha c_4 & \cdots & c_1 \end{bmatrix}_{M \times N}$$

其中 $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n \in \{1, -1\}$ 。广义轮换矩阵中系数 α 的添加使得列向量之间的非相关性有了很大的提高, 保证了列向量之间的线性独立性, 但列向量应有的独立随机性却难以体现, 而且广义轮换矩阵不够稀疏, 要重建信号需要较多的测量值, 运算复杂度也比较高。

2.2 基于正交基线性表示的测量矩阵构造方法

基于正交基线性表示的矩阵构造方法^[8]是一种改进的测量矩阵构造方法, 其原理是先生成一个 $M \times M$ 维的正交矩阵 Φ_0 , 再将 Φ_0 的 M 个列向量看做正交基, 利用正交基线性表示剩余的 $N-M$ 列, 就构成了 $M \times N$ 的测量矩阵 Φ 。为了保证得到的测量矩阵符合要求, 正交基的线性系数至关重要。由于 M 维空间里最大的线性无关组是 M 个, 所以由正交基线性表示的 $\phi_{M+1}, \phi_{M+2}, \dots, \phi_N$ 必然与前面的 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_M$ 有一定的相关性, 而为了保证这种相关性最小, 最理想的情况就是 $\phi_{M+1}, \phi_{M+2}, \dots, \phi_N$ 中任意一个向量与 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_M$ 中任意 $M-1$ 个向量线性无关, 即要求正交基线性系数应全部为非零实数。而 $\phi_{M+1}, \phi_{M+2}, \dots, \phi_N$ 之间的线性无关性问题可以转化为构造线性无关系数向量的问题, 高斯随机数作为标准正交基系数, 其本身有较好的多样性, 能产生多组非线性相关的系数序列, 适合压缩比 $M/N \leq 0.5$ (即 $N-M \geq M$) 的情况, 可以保证 $\phi_{M+1}, \phi_{M+2}, \dots, \phi_N$ 之间有较好的线性独立性, 但是无法保证系数的非零性。通过循环直积和 QR 分解构造的伪随机数^[8]具有正交性、线性无关, 可以作为正交基线性系数。但是因为此种方法最多只能构造 M 个正交的系数序列, 所以只适合压缩比 $M/N \geq 0.5$ (即

技术与方法 Technique and Method

$N-M \leq M$) 的情况。

2.3 基于正交基线性表示的二进制生成矩阵

针对广义轮换矩阵的缺点做出改进,并结合正交基线性表示的测量矩阵构造方法提出一种适合压缩比较小的伪随机数,以此作为正交基线性系数,构造出了新的测量矩阵——基于正交基线性表示的二进制生成矩阵。

首先,对广义轮换矩阵进行改进。针对 $[1, -1]$ 作为原子生成的测量矩阵不够稀疏,选择二进制向量原子 $[1, 0]$ 来生成构造向量。二进制向量原子是计算机本身语言,硬件实现更简单,且生成的测量矩阵增加了很多零值,稀疏性更好,减少了测量数和运算复杂度。然后,利用正交基线性表示的思想构造测量矩阵。在构造新的测量矩阵时,首先生成一个 $M \times M$ 维的广义轮换矩阵 C ,将其改造成一个正交矩阵 Φ_0 ,把矩阵的列向量看作正交基,利用正交基的线性组合来表示剩余 $N-M$ 列,在线性系数选择时,采用确定数+随机数的伪随机数,随机数选择性能优秀的高斯随机数,确定数选择不为0的实数,只要能保证系数的非零即可。此伪随机数构造方法简单,并可以通过确定数的选择有效控制系数的值,保证系数是所需要的非零的随机数。由高斯随机数多样性、可以产生多组线性无关的系数序列等特点可知,此类随机数特别适合压缩比 $M/N \leq 0.5$ 的情况。

具体构造过程如下:

(1)选择向量原子 $[1, 0]$,构造一个长度为 M 的行向量 $u=[1, 0, 1, 0, \dots]$ 。对向量的元素进行随机置换得到矩阵第一行 $u_1=[c_i, c_j, \dots, c_m, c_n]$,式中 $c_i, c_j, \dots, c_m, c_n \in \{1, 0\}$ 。这可以增加测量矩阵与信号之间的非相关性,保证测量矩阵的性质。

(2)利用上步构造出的长度为 M 的向量 u_1 作为第一行,利用广义轮换的思想,依次循环来生成所需的 $M \times M$ 维的广义轮换矩阵,系数 $\alpha (\alpha > 0)$ 保证了列向量之间线性独立性。所得矩阵形式如下:

$$C = \begin{bmatrix} c_i & c_j & \dots & c_m & c_n \\ \alpha c_n & c_i & c_j & \dots & c_m \\ \alpha c_m & \alpha c_n & c_i & \dots & \\ & & \dots & & \\ \alpha c_j & \dots & \alpha c_m & \alpha c_n & c_i \end{bmatrix}_{M \times M}$$

(3)将步骤(2)得到的 $M \times M$ 维广义轮换矩阵 C 改造成正交矩阵 Φ_0 。对矩阵 C 的列向量进行正交归一化得到正交矩阵 $\Phi_0=[\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_M]_{M \times M}$,其中 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_M$ 是正交矩阵的列向量,也是所需的标准正交基。

(4)利用步骤(3)得到的 $M \times M$ 维的正交矩阵 Φ_0 构造 $M \times N$ 维的测量矩阵 Φ 。生成确定数+随机数组合的 M 维伪随机数向量 $f_{M+1}, f_{M+2}, \dots, f_N$ 作为正交基线性系数,线性表示剩余的 $N-M$ 个列向量,得到 $M \times N$ 维的测量矩阵 $\Phi=[\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_M, \phi_{M+1}, \phi_{M+2}, \dots, \phi_N]_{M \times N}$,其中 $\phi_{M+1}=\Phi_0 f_{M+1}, \dots, \phi_N=\Phi_0 f_N$ 。为了保证测量矩阵满足RIP^[9]特性,对列向量进行归一化后得到最终的测量矩阵。

3 仿真实验和结果

为了验证构造的新测量矩阵的性能,采用 Matlab 图像库中提供的标准 256×256 Lena 图像进行仿真实验。首先利用小波变换对原图像进行稀疏化处理,然后分别选用新矩阵、部分哈达玛、托普利兹、广义轮换、部分正交等测量矩阵对稀疏化后的图像进行测量,最后采用OMP^[10]重建算法对压缩后的图像信号进行恢复,得到恢复图像。针对压缩比 $M/N \leq 0.5$ 的情况,得到图1所示的峰值信噪比(PSNR)性能比较图。

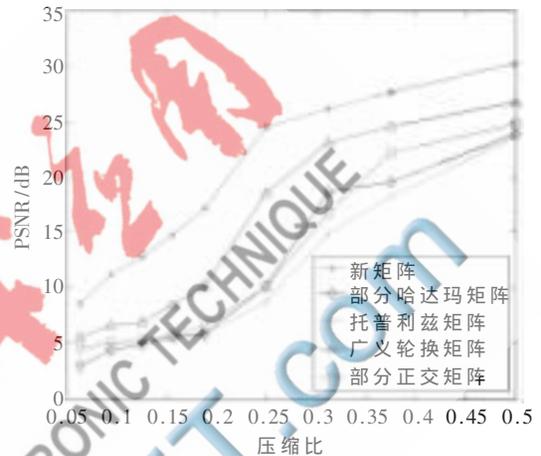


图1 常见部分随机测量矩阵的峰值信噪比 PSNR 比较

由实验结果可以看出,广义轮换矩阵的性能要优于其他测量矩阵,而因为新的测量矩阵是由广义轮换矩阵改进了向量原子后得到的,所以针对不同的压缩比,新矩阵的性能变化曲线与广义轮换矩阵相似,但整体性能要比广义轮换矩阵高出3 dB左右。在压缩比较小时,新矩阵相比于其他测量矩阵具有更突出的优势,验证了确定数+高斯随机数的伪随机数更适合这种压缩比较小的情况。整体而言,对于压缩比 $M/N \leq 0.5$ 的情况,新的测量矩阵在和其他部分测量矩阵的对比中表现出了更好的性能。

图2给出了 256×256 Lena 图像的原始图像和利用新的测量矩阵测量后恢复的图像,此处选择压缩比 $M/N=0.5$,此时的峰值信噪比 PSNR 达到了30.28。

本文旨在研究压缩感知中的测量矩阵,改进了广义



(a)原始图像 (b)恢复图像

图2 原始图像与新矩阵测量恢复图像的比较

技术与方法 Technique and Method

轮换矩阵的向量原子, 结合正交基线性表示的构造方法, 提出用确定数+随机数的伪随机数作为正交基系数, 构造了新的测量矩阵——基于正交基线性表示的二进制生成矩阵。首先, 改进广义轮换矩阵向量原子, 采用二进制 1 和 0 交替的向量原子, 矩阵更稀疏, 硬件实现更简单; 然后, 结合正交基线性表示的思想, 将广义轮换构造的正交矩阵作为正交基, 针对 $M/N \leq 0.5$ 的情况, 提出采用确定数+随机数组合的伪随机数作为线性系数, 构造出新的测量矩阵。选择二维图像数据进行仿真实验, 应用不同测量矩阵进行对比, 实验结果显示新的测量矩阵拥有更好的性能。

参考文献

- [1] DONOHO D. Compressed sensing[J]. IEEE Transaction on Information Theory, 2006, 52(4): 1289-1306.
- [2] CANDÈS E. Compressive sampling[A]. Proceedings of the international congress of mathematicians[C]. Madrid, Spain, 2006: 1433-1452.
- [3] CANDÈS E, ROMBERG J, TAO T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. IEEE Transaction on Information Theory, 2006, 52(2): 489-509.
- [4] DONOHO D, TSAIG Y. Extensions of compressed sensing[J]. Signal Processing, 2006, 86(3): 533-548.
- [5] DEVORE R. Deterministic constructions of compressed sensing matrices[J]. Journal of Complexity, 2007, 23(4-6): 918-925.
- [6] CANDÈS E, TAO T. Near optimal signal recovery from random projections: universal encoding strategies[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(12): 5406-5425.
- [7] RAUHUT H. Circulant and toeplitz matrices in compressed sensing[J]. In Processing SPARS'09, 2009, 2(13): 1124-1132.
- [8] 李浩. 用于压缩感知的确定性测量矩阵研究[D]. 北京: 北京交通大学, 2011.
- [9] CANDÈS E. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing[J]. C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 2008, 346(9-10): 589-592.
- [10] TROPP J, GILBERT A. Signal recovery from partial information via orthogonal matching pursuit[EB/OL]. (2005-04). [2012-11-22]. <http://www.personal.umich.edu/~jtropp/papers/TG05-Signal-Recovery.pdf>.

(收稿日期: 2013-01-21)

作者简介:

马庆涛, 男, 1985 年生, 硕士研究生, 主要研究方向: 现代通信中的智能信号处理。

唐加山, 男, 1968 年生, 博士, 教授, 硕士研究生导师, 主要研究方向: 现代通信中的智能信号处理。