基于谱回归判别分析的 LPP 算法*

杨 凡，张银玲，牛 静

(浙江师范大学 数理与信息工程学院，浙江 金华 321004)

摘 要：判别局部保持投影 DLPP 算法在计算过程中需要解决稠密矩阵特征分解问题，这使得该算法在时间和内存上消耗都非常高。谱回归判别分析 SRDA 算法可以有效的节省时间和内存的消耗。基于 SRDA，提出一种改进的局部保持投影 LPP 算法——谱回归判别局部保持投影算法 SRDLPP。实验结果表明，该算法可以提高识别率，同时降低时间和内存消耗。

关键词：判别局部保持投影；局部保持投影算法；谱回归判别分析；人脸识别

中图分类号：TP391.41 文献标识码：A 文章编号：1674-7720(2012)16-0038-04

LPP algorithm based on spectral regression discriminant analysis

Yang Fan，Zhang Yinling，Niu Jing

(College of Mathematics Physics and Information Engineering of Zhejiang Normal University，Jinhua 321004，China)

Abstract: The computation of Discriminant Locality Preserving Projection (DLPP) algorithm involves dense matrices eigen-decomposition which can be computationally expensive both in time and memory. Spectral Regression Discriminant Analysis (SRDA) algorithm can save both time and memory efficiently. Inspired by SRDA, we propose a novel improvement algorithm for LPP: called Spectral Regression Discriminant Locality Preserving Projection (SRDLPP). Experimental results on face recognition demonstrate that it can improve recognition rate and meanwhile save time and memory.

Key words: locality preserving projection; discriminant locality preserving projection; spectral regression discriminant analysis; face recognition

人脸识别中的维数约简是一个关键问题，流行的维数约简方法包括主成分分析 PCA（Principal Component Analysis）[1]、线性判别分析 LDA(Linear Discriminant Analysis)[2]、局部保持投影 LPP(Locality Preserving Projection)[3]等。LPP 被认为是一种有效的维数约简方法，它在保持数据集的局部结构的同时，通过邻接图来确认流形结构模型的一种线性变换，它已经成功应用于许多邻域[4]。LPP 的目的是寻找一个投影矩阵，在投影后，两个样本点的距离最小，然而，它却忽略了样本间的判别信息。参考文献 [5] 中，Yu 提出了判别局部保持投影 DLPP(Discriminant Locality Preserving Projection)算法，他在 LPP 算法中加入了判别信息来提高识别率。但是，在 DLPP 算法计算过程中，需要解决密度矩阵的特征分解问题，这给时间和内存方面带来了非常高的计算成本。参考文献[6]中，Cai 证明了 LDA 的空间复杂度为：$O(mnt+t^3)$，并且占用内存为：$O(mn+mt+nt)$，其中 m 是样本的个数，n 是类个数，$t=\min(m,n)$。当 m 和 n 很大时，应用到较大的数据集上，几乎是不可行的。最近，谱方法作为一种有效的维数约简方法已经运用到人脸识别中。参考文献[6]中，Cai 提出一个新的判别分析算法，即谱回归判别分析 SRDA (Spectral Regression Discriminant Analysis)。通过使用谱图分析，SRDA 将判别分析投射到回归框架上，它只需要解决一系列正则化的最小二乘问题，而不需要计算特征向量，节省了时间和内存的消耗，在计算方面明显地优于 LDA 算法。本文提出了一种新的改进算法——谱回归判别局部保持投影 SRDLPP(Spectral Regression Discriminant Locality Preserving Projection)。其在 LPP 算法中加入了谱回归判别分析算法，这样可以避免解密度矩阵特征分解时带来的高昂的内存和时间的消耗。分别在 Yale、Orl 和扩展 Yale_B 人脸库上进行实验，实验结果表明，本算法优于其他算法。

* 基金项目：浙江师范大学计算机软件与理论省级重中之重学科开放基金；浙江省大学生科技创新活动计划(新苗人才计划)项目编号：2011R404054

1 算法介绍

1.1 LDA 算法

线性判别分析 LDA(Linear Discriminant Analysis)是从高维特征空间中提取出最具有判别能力的低维特征，以达到抽取分类信息和压缩特征空间维数的效果，投影后保证样本在新的子空间有最大的类间距离和最小的类内距离。算法思想如下：

假设对于一个 R^n 空间有$\{x_i\}$个样本分别为 $x_1,x_2,\cdots,x_m$，即每个 $\boldsymbol{x}$ 是一个 $N\times M$ 行的矩阵，假设有 C 个类，则 $n_1+n_2+\cdots+n_i+\cdots+n_c=m$。

样本类间离散度矩阵定义为：

$$\boldsymbol{S}_b=\sum_{k=1}^{C}m_k(u^{(k)}-u)(u^{(k)}-u)^{\mathrm{T}} \tag{1}$$

样本类内离散度矩阵定义为：

$$\boldsymbol{S}_w=\sum_{k=1}^{C}\sum_{x_k\in \text{class } i}(x_i^{(k)}-u^{(k)})(x_i^{(k)}-u^{(k)})^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

LDA 的目的是寻找一个变换矩阵 $\boldsymbol{W}$：

$$\boldsymbol{W}=\arg\max_{w}\frac{|\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_b\boldsymbol{W}|}{|\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_w\boldsymbol{W}|}=(w_1,w_2,\cdots,w_m)$$

$$\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix} w_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & w_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & w_m \end{bmatrix} \tag{3}$$

根据式(3)，$\boldsymbol{S}_b=\sum_{k=1}^{m}\bar{\boldsymbol{X}}^{(k)}\boldsymbol{W}^{(k)}(\bar{\boldsymbol{X}}^{(k)})^{\mathrm{T}}=\bar{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{W}\bar{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}$，又因为 $\boldsymbol{S}_t=\bar{\boldsymbol{X}}\,\bar{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}$，所以 $\boldsymbol{S}_w=\boldsymbol{S}_t-\boldsymbol{S}_b=\bar{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{W})\bar{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}=\bar{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{L}\bar{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}$。当 $\boldsymbol{S}_w$ 非奇异时，变换矩阵 $\boldsymbol{W}$ 的广义特征方程为：

$$\boldsymbol{S}_b\varphi=\lambda \boldsymbol{S}_w\varphi$$

即

$$\bar{X}W\bar{X}^{\mathrm{T}}a=\lambda\bar{X}\,\bar{X}^{\mathrm{T}}a \tag{4}$$

由于 $\boldsymbol{S}_b$ 的秩为 $c-1$。存在最大 $c-1$ 个特征向量对应的非零特征值[7]。因为 $\bar{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{L}\bar{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}$、$\bar{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{W}\bar{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}$ 是稠密的，所以为了得到一个稳定的解决上述特征值问题的解，必须是非奇异的。然而，当样本的个数远远大于类的个数时，这种情况根本不能求解。

在过去的几十年中，有人提出各种各样的方法来解决这个问题(例如 SVD、PCA+LDA 等方法)[2,8-11]。谱回归判别分析算法思想来源于谱方法 SR(Spectral Regression)。SR 算法从根本上是基于回归和谱图分析[12]。SR 能够有效地应用标记点和非标记点来发现数据内在的固有的判别式结构。这个图用于得到标记点和非标记点的学习响应。一旦得到响应，嵌入函数可以通过一般的回归模型得到。SR 算法避免了解密度矩阵的特征分解问题。根据 SR 算法，CAI 提出 SRDA 算法。

1.2 SRDA 算法

为了有效解决 LDA 方程(4)的特征问题，利用如下定理：

定理 1：设 $\bar{y}$ 是特征方程(5)的特征向量，特征值为 λ。若 $\bar{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}=\bar{\boldsymbol{y}}$，则特征方程(4)的特征向量为 $\boldsymbol{a}$，特征值为 λ。

$$\boldsymbol{W}\bar{\boldsymbol{y}}=\lambda\bar{\boldsymbol{y}} \tag{5}$$

证明：已知 $\boldsymbol{W}\bar{\boldsymbol{y}}=\lambda\bar{\boldsymbol{y}}$，特征方程(4)的左边用 $\bar{\boldsymbol{y}}$ 代替 $\bar{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}$：

则 $\bar{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{W}\bar{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}=\bar{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{W}\bar{\boldsymbol{y}}=\bar{\boldsymbol{X}}\lambda\bar{\boldsymbol{y}}=\lambda\bar{\boldsymbol{X}}\,\bar{\boldsymbol{y}}=\lambda\bar{\boldsymbol{X}}\bar{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}$

定理 1 求特征方程(4)的解，从下列两步获得：

(1) 解特征方程(5)得到 $\bar{\boldsymbol{y}}$。

(2) 找到能够满足 $\bar{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}=\bar{\boldsymbol{y}}$ 的 $\boldsymbol{a}$。实际上，$\boldsymbol{a}$ 可能不存在。可行的方法是找到 $\boldsymbol{a}$，使它满足下列最小二乘法：

$$\boldsymbol{a}=\arg\max_{a}\sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}x_i-\bar{y}_i)^2 \tag{6}$$

其中，$\bar{y}_i$ 是 $\bar{\boldsymbol{y}}$ 的第 i 个元素。

然而在样本数比类个数小的情况下，最小化问题式(6)是病态的。线性方程系统 $\bar{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}=\bar{\boldsymbol{y}}$ 有无限多解。解决这个问题的最普遍的方法是加入一个范数 α：

$$\boldsymbol{a}=\arg\min_{a}\left(\sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\bar{x}_i-\bar{y}_i)^2+\alpha\|\alpha\|^2\right) \tag{7}$$

称为正则化，在统计学中有很好的研究。正则的最小二乘法同样被称为脊回归[13]。该算法是在图的谱分析之后对 LDA 的特征方程进行回归处理，因此称为谱回归判别分析，简记为 SRDA。

1.3 SRDLPP 算法

根据以上的分析可知，LDA 的计算包括解密度矩阵的特征分解，这使得时间内存上都带来了很大的消耗。SRDA 算法可以有效地节省时间和内存。受 SRDA 算法启发，本文提出一种改进的 LPP 算法：谱回归判别局部保持投影 SRDLPP(Spectral Regression Discriminant Locality Preserving Projection)。算法如下：

LPP 的目的是寻找 x_i 经过投影后在低维空间中对应的点 y_i，$y_i=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}x_i$。$\boldsymbol{Y}=[y_1,y_2,\cdots,y_m]$，是一个$(d\times m)$矩阵$(d<<N)$。目标函数：

$$\min\sum_{i,j}W_{ij}\|y_i-y_j\|^2 \tag{8}$$

$\boldsymbol{W}$ 是对称的矩阵，最小化目标函数就是要确保当 a_i 和 a_j 距离很近时，y_i 和 y_j 的距离也很近。

(1) 创建邻接图：设 G 是表示 m 个顶点的图，每一个顶点代表一个数据点。$\boldsymbol{W}$ 是对称的 $m\times m$ 矩阵，表示连接点 i 和 j 的权值为 W_{ij}。这里采用 K 邻域法构造权值矩阵 $\boldsymbol{W}$。

$$W_{ij}=\begin{cases}\dfrac{\exp(-\|x_i-x_j\|^2)}{t}, & x_i\in N_k(x_j)\text{或 } x_j\in N_k(x_i)\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{9}$$

用 $N_k(x_j)$表示 x_i 的 K 邻域集。

在一定的约束条件下使得式(8)中 $\boldsymbol{y}$ 是最佳的，描述为：

$$\sum_{i,j}(y_i-y_j)^2 W_{ij}=2y^{\mathrm{T}} Ly \tag{10}$$

其中 $L=D-W$，D 是对角矩阵，对角线上的元素为 W 的每一列或者行的和，即 $D_{ii}=\sum_j W_{ji}$。

其中最优化的 y 是下列特征问题的最大特征向量

$$Wy=\lambda Dy \tag{11}$$

又因为存在一个线性函数：$y_i=a^{\mathrm{T}} x_i$

则特征方程(11)为：

$$a^*=\arg\min\frac{y^{\mathrm{T}} Ly}{y^{\mathrm{T}} Dy}=\arg\min\frac{a^{\mathrm{T}} XLX^{\mathrm{T}} a}{a^{\mathrm{T}} XDX^{\mathrm{T}} a} \tag{12}$$

那么 a 就是下列方程最小特征值问题对应的特征向量：

$$XLX^{\mathrm{T}} a=\lambda XDX^{\mathrm{T}} a \tag{13}$$

(2) 特征分解：计算特征方程(13)的解，可以从以下两步中获得：

根据定理1：

①求解特征问题式(11)得到 y.

②找到能够满足 $\bar{X}^{\mathrm{T}} a=\bar{y}$ 的 a。实际上，a 可能不存在。可行的方法是找到 a，使得它满足下列最小二乘法：

$$a=\arg\min_a \sum_{i=1}^{m}(a^{\mathrm{T}}\bar{x}_i-\bar{y}_i)^2 \tag{14}$$

(3)正则化最小二乘问题：根据上面分析，最小化方程(14)可能是病态的，所以加入一个范数 a：

$$a=\arg\min_a\left(\sum_{i=1}^{m}(A^{\mathrm{T}}\bar{x}_i-A^{\mathrm{T}}x_j)^2+a\|\alpha\|^2\right) \tag{15}$$

找到 d 个向量 $a_1,\cdots,a_d\in R_n, a_j=(j=1,\cdots,c-1)$。

2 SRDA 嵌入到 LPP 中

设 $A=[a_1,\cdots,a_d]$，A 是 $n\times(c-1)$ 变换矩阵，样本数据点可以嵌入 $c-1$ 维空间中：$x_i\rightarrow y_i=A^{\mathrm{T}}x_i$，$A=[a_1,a_2,\cdots,a_d]$

y 是样本点数据的 d 维表示，A 是本文算法的转变矩阵。根据以上分析，在数据库上进行实验。

3 实验结果与分析

3.1 Yale 人脸库

Yale 人脸库共有165张人脸图像，每个人有11张的表情照片，归一化为32×32人脸图像。这些照片有戴眼镜、不戴眼镜、开心、悲伤等，共11种表情。Gp/Pq 表示每人随机选取 p 张训练集人脸训练，q 张测试集人脸测试。每一个训练集选取(3,4,5,6,7,8)图像，例如：3训练集表示训练图像共有45张人脸用来训练，剩余8测试集共120张人脸用来测试。为了确保实验结果的可靠性，每次实验重复20次，取平均识别率和时间消耗值，正则化参数 a 根据经验选择0.01。实验结果如表1、表2所示。表1、表2显示了 Yale 人脸库上的识别率和时间消耗，可以看出，本文算法的结果优于 DLPP 和 LPP 算法。DLPP 需要计算密度矩阵特征分解问题，它占用更多的时间和内存；对于 LPP 来说，当训练数增加时，识别率下降；本文提出的算法最高识别率达到94.53%。表2表示每一次识别的平均时间，当训练样本数增加时，DLPP 时间消耗越多。

表1 Yale 人脸库识别率 (%)

算法 / 训练样本	SRDLPP	DLPP	LPP
G3/P8	86.17	78.17	76.67
G4/P7	90.76	81.62	76.38
G5/P6	91.56	79.78	77.56
G6/P5	94.53	79.73	76.13
G7/P4	93.67	82.83	76.33
G8/P3	94.44	81.78	76.67

表2 Yale 人脸库上消耗时间 (s)

算法 / 训练样本	SRDLPP	DLPP	LPP
G3/P8	0.5776	5.5342	0.5260
G4/P7	0.4994	6.3126	0.6096
G5/P6	0.5197	7.2653	0.5427
G6/P5	0.5168	8.2171	0.5842
G7/P4	0.5058	10.3248	0.5656
G8/P3	0.5231	11.0418	0.5766

3.2 ORL 人脸库

ORL 人脸库，共有40人，每人有10幅图像，这些图像包含表情和姿态变化。原图像的大小为112×92，在预处理阶段，统一归一化成32×32大小的人脸图像。随机选择每人(3,4,5,6,7,8)图像集作为训练，其他作为测试。例如：3训练集共120个人脸图像作为训练，余下7测试集共280个人脸图像作为测试。为了确保得到稳定的实验结果，每次实验重复20次。取平均识别率和平均时间消耗。实验结果如表3、表4所示。 DLPP 的识

表3 在 ORL 人脸库识别率 (%)

算法 / 训练样本	SRDLPP	DLPP	LPP
G3/P7	84.61	87.07	63.11
G4/P6	87.75	91.46	60.83
G5/P5	90.30	94.10	64.05
G6/P4	91.81	95.25	63.62
G7/P3	92.58	95.42	64.08
G8/P2	93.38	97.88	67.50

表4 在 ORL 人脸库上时间消耗 (s)

算法 / 训练样本	SRDLPP	DLPP	LPP
G3/P7	0.8481	11.3027	0.8027
G4/P6	0.7482	19.1639	1.0982
G5/P5	0.7982	25.4514	1.2477
G6/P4	0.8162	33.7912	1.4185
G7/P3	0.8558	39.1021	1.8214
G8/P2	0.8483	48.0851	2.8634

别率优于本文提出的算法和 LPP 算法。但是它同时也消耗了大量的时间。计算平均数据集每一次所占用的时间消耗，最高的达到 50 s。

3.3 扩展 Yale_B 人脸库

扩展的 Yale_B 人脸数据库包含 16 128 幅人脸图像，共 38 类，9 种姿态 65 种细节下进行，本文选择正面且所有的图片细节不同，每人得到 64 图片。所有人脸图片剪裁为 32×32 像素，256 灰度级。特征(像素值)在[0，1]之间(除以 256)。实验结果如表 5、表 6 所示。

表 5 在扩展 Yale_B 人脸库识别率 (%)

算法 训练样本	SRDLPP	DLPP	LPP
G5/P59	59.79	60.79	36.13
G10/P54	65.03	74.33	42.71
G20/P44	56.35	82.56	50.48
G30/P34	79.33	86.38	63.08
G40/P24	93.28	88.56	62.82
G50/P14	95.91	89.67	65.08

表 6 在扩展 Yale_B 人脸库上时间消耗(s)

算法 训练样本	SRDLPP	DLPP	LPP
G5/P59	11.575 1	36.397 7	13.892 6
G10/P54	18.927 0	86.310 2	21.035 9
G20/P44	26.399 6	206.043 8	29.426 9
G30/P34	26.704 0	334.791 0	37.311 1
G40/P24	22.437 1	464.638 0	46.569 1
G50/P14	16.322 3	876.212 3	57.163 8

表 5、表 6 为在扩展的 Yale_B 人脸库上的识别率和时间消耗。可见，DLPP 的识别率比较高，但是占用了太多的时间，平均识别一次所需要时间最高达到 900 s。本文提出的算法最高识别率达到 95.91%。

综合以上 3 个实验结果可知，本文提出的算法，在一定程度上提高了识别率，特别是时间消耗方面具有明显的优势，尤其是在数据集较大的情况下，优势越明显。

本文提出一种新的人脸识别算法——谱回归判别局部保持投影算法 SRDLPP(Spectral Regression Discriminant Locality Preserving Projection)。它利用谱回归判别分析的思想加入到局部保持投影中。实验结果表明，虽然 DLPP 的识别率有较好的效果，但是由于它需要计算密度矩阵求解特征问题，占用了很大的时间和内存消耗，在实际运用中存在弊端。谱回归判别分析算法只需要解决一系列正则化的最小二乘问题，而不需要计算特征问题，这大大地节省了时间和内在的消耗。SRDLPP 算法不仅提高了识别率而且时间和内存的消耗都比较少。分别在 Yale、Orl 及扩展 Yale_B 人脸库上进行实验，结果表明该算法具有高效的识别率、低的时间及内存消耗。

参考文献

[1] MARDIA K V, KENT J T, BIBBY J M. Multivariate analysis[M]. Academic Press, 1980.

[2] SWETS D L, WENG J Y, Using discriminant eigenfeatures for image retrieval[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1996, 18(8):831-836.

[3] He Xiaofei, NIYOGI P. Locality preserving projections[A]. Neural Information Processing System[C]. Vancouver: MIT Press, 2003.

[4] FOLEY D H, SAMMON J W Jr. An optimal set of discriminant vectors, IEEE Transactions on Computer, 1975, C-24(3):281-289.

[5] Yu Weiwei, Teng Xiaolong, Liu Chongqing. Face recognition using discriminant locality preserving projections[J]. Image and Vision Computer, 2006(24):239-248.

[6] Cai Deng, He Xiaofei, Han Jiawei. SRDA: an efficient algorithm for large scale discriminant analysis[J]. IEEE Transactions on Knavledge and Data Engineering, 2008, 20(1): 1-12.

[7] FUKUNAGA K. Introduction to statistical pattern recognition 2nd edition[M]. Academic Press, 1990.

[8] TORKKOLA K. Linear discriminant analysis in document classification[C]. Proceedings of IEEE ICDM Workshop Text Mining, 2001.

[9] HOWLAND P, PARK H. Generalizing discriminant analysis sing the generalized singular value decomposition[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2004, 26(8):995-1006.

[10] YE J. Characterization of a family of algorithms for generalized discriminant analysis on undersampled problems[J]. Journal of Machine Learning Research, 2005(6):483-502.

[11] FRIEDMAN J H. Regularized discriminant analysis[J]. Journal of the American Statistical Association, 1989, 84(405):165-175.

[12] CHUNG F R K. Spectral graph theory[M]. AMS, 1997.

[13] HASTIE T, TIBSHIRANI R, FRIEDMAN J. The elements of statistical learning: data mining, inference, and prediction[M]. New York: Springer-Verlag, 2001.

(收稿日期：2012-04-23)

作者简介：

杨凡，男，1957 年生，教授，硕士生导师，主要研究方向：数字图像处理，指纹识别，人脸识别等。

张银玲，女，1988 年生，硕士研究生，主要研究方向：模式识别。

牛静，女，1990 年生，硕士研究生，主要研究方向：数字图像处理。