

## 基于有限自动机的二值图像的开运算\*

刘耀军<sup>1</sup>, 张姗梅<sup>2</sup>

(1. 太原师范学院 计算机科学与技术系, 山西 太原 030012;

2. 太原师范学院 数学系, 山西 太原 030012)

摘要: 以图像与图像平移的并集作为状态集, 以探针与探针拷贝的并集作为输入字母表, 用向量加减法构造状态转换映射和输出映射, 给出了实现数学形态学基本运算开运算的有限自动机。与通用计算机对图像的串行处理相比, 开运算自动机采取了并行结构。开运算自动机将运算的时间复杂度降低到了探针像素个数减 1。

关键词: 图像处理; 分形; 形态学开运算; 有限自动机

中图分类号: TP301.1; TP391.41

文献标识码: A

文章编号: 1674-7720(2012)12-0039-04

## Binary image open operation based on finite automata

Liu Yaojun<sup>1</sup>, Zhang Shanmei<sup>2</sup>

(1. Department of Computer Science and Technology, Taiyuan Normal University, Taiyuan 030012, China;

2. Department of Mathematics, Taiyuan Normal University, Taiyuan 030012, China)

Abstract: This paper designs finite automata for the basic morphological operation open. The state set of the automata is the union of the image with its translation, and the input alphabet is the union of the probe with its copy. The state transformation and output mapping are constructed by using vector addition and subtraction. Compared the serial image processing of the general-purpose computer, the open automata adopts parallel architecture. The open automata reduces the time complexity to the probe pixel number minus 1.

Key words: image processing; fractal; morphological open; finite automaton

虽然通用计算机已被广泛地应用于图像处理, 但是就其体系结构而言是不适合处理图像数据的。通用计算机的串行性限制了它在图像处理中的效率, 因此有必要开发专用的图像处理器。自 20 世纪 60 年代 MATH-ERON G 和 SERRA J 创立了用于图像处理的数学形态学以来, 在过去的 50 多年里得到了大量基于数学形态学的图像处理器, 包括 Golay 逻辑处理器<sup>[1]</sup>、Diff3<sup>[2]</sup>、PICAP<sup>[3]</sup>、Leitz 纹理分析系统<sup>[4]</sup>、CLIP 阵列处理器<sup>[5]</sup>、细胞计算机<sup>[6]</sup>和 Delft 图像处理器<sup>[7]</sup>。这些处理器对于图像的局部变换有较好的效果, 它们都属于原胞机器<sup>[8]</sup>。

自 20 世纪 90 年代 KARI J 将自动机应用于图像压缩以来, 在过去的近 20 年里, 得到了基于有限自动机的大量图像压缩的有效算法<sup>[9]</sup>, 并且将其中一些算法转化成了实际的图像压缩技术<sup>[10]</sup>。

数学形态学和自动机理论之所以能够被应用于数字图像处理, 是因为多数图像具有分形性。而数学形态

学中的探针体现了这种分形结构<sup>[11]</sup>, 有限自动机识别的正规语言的正规分解也体现了分形结构<sup>[12-13]</sup>。

本文将有限自动机应用于数学形态学基本运算开运算的实现, 得到了可对图像进行并行处理的有限自动机, 降低了开运算的时间复杂度。

## 1 数学形态学的基本概念

对于二维欧式空间  $R^2 = \{(x, y) | x, y \in R\}$  中的任意向量  $(x, y)$ 、 $(x_1, y_1)$ 、 $(x_2, y_2)$  和任意实数  $r$ , 加法、减法、数乘、内积、度量及长度依次定义如下:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$(x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$

$$r(x, y) = (rx, ry)$$

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 + y_1y_2$$

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$|(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

数学形态学中, 二值图像被定义为  $R^2$  中的点集。若

\* 基金项目: 山西省重点学科建设专项基金项目(20101029)

## 图形、图像与多媒体

Image Processing and Multimedia Technology

$A$  是一幅二值图像,则它由黑白两种颜色组成,在  $A$  中的点是黑色点,称为图像的前景;不在  $A$  中的点是白色点,称为图像的背景。设  $A$ 、 $B$  为图像, $c$  为  $\mathbf{R}^2$  中的点。 $(A)_c$ 、 $\hat{A}$  依次为将  $A$  做平移  $c$  及  $A$  关于原点反射所得到的集合,即:

$$(A)_c = \{a+c | a \in A\}$$

$$\hat{A} = \{-a | a \in A\}$$

$A \oplus B$ 、 $A \ominus B$ 、 $A \circ B$  和  $A \odot B$  依次是  $A$  与  $B$  的膨胀、腐蚀、开运算和闭运算,即:

$$A \oplus B = \bigcup_{b \in B} (A)_b$$

$$A \ominus B = \bigcap_{b \in \hat{B}} (A)_b$$

$$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$$

$$A \odot B = (A \oplus B) \ominus B$$

设  $B$  是  $B_1$  和  $B_2$  的并,使得  $B_1 \cap B_2 = \phi$ ,即  $B_1$  与  $B_2$  不相交。定义  $A$  被  $B$  的击中为:

$$A \circledast (B_1, B_2) = (A \ominus B_1) \cap (A \ominus B_2)$$

在以上运算中,称图像  $B$  为图像  $A$  的探针。利用以上的基本形态学运算,可以建立图像处理的基本形态学算法,这些算法包括边缘提取、区域填充、连通分支提取、重构、薄化、厚化、骨架提取和剪枝等。

关于腐蚀和膨胀运算有如下等价的刻画:

$$A \ominus B = \{x \in \mathbf{R}^2 | (B)_x \subseteq A\}$$

$$A \oplus B = \bigcup_{b \in B} (A)_b = \bigcup_{a \in A} (B)_a$$

$$(A \ominus B)_{(i,j)} = \bigwedge_{(m,n)} (A)_{(i+m,j+n)} \vee B_{(m,n)}$$

$$(A \oplus B)_{(i,j)} = \bigvee_{(m,n)} (A)_{(i-m,j-n)} \wedge B_{(m,n)}$$

上面最后的两个等式中, $\bigwedge$ 、 $\bigvee$  依次为逻辑与、或运算。 $B_{(m,n)}$  表示图像  $B$  在  $(m,n)$  点的灰度值,当  $(m,n)$  在图像  $B$  的前景中时, $B_{(m,n)}=1$ ;当  $(m,n)$  在图像  $B$  的背景中时, $B_{(m,n)}=0$ 。

膨胀与腐蚀运算之间是对偶的,即如下等式成立:

$$(A \ominus B)^c = A^c \oplus \hat{B}$$

$$(A \oplus B)^c = A^c \ominus \hat{B}$$

其中, $A^c$  表示  $A$  的补集,即  $A^c$  是图像  $A$  的背景。

在下文中, $A$ 、 $B$  始终表示二值图像, $B$  是  $A$  的探针。

## 2 图像开运算的有限自动机

设  $\Sigma$  是一个非空有限集,称  $\Sigma$  为字母表, $\Sigma$  中的元素为字母, $\Sigma$  中的有限序列  $x_1x_2 \cdots x_k$  为  $\Sigma$  上的字,空序列为空字,记为  $\varepsilon$ ,把  $\Sigma$  上所有的字组成集合记为  $\Sigma^*$ 。以连接运算作为  $\Sigma^*$  中的运算,即  $(x_1x_2 \cdots x_k)(y_1y_2 \cdots y_l) = x_1x_2 \cdots x_ky_1y_2 \cdots y_l$ ,其中, $x_1, x_2, \dots, x_k$  和  $y_1, y_2, \dots, y_l$  是  $\Sigma$  中的字母,则  $\Sigma^*$  是幺半群,称其为字母表  $\Sigma$  上的自由幺半群, $\varepsilon$  是单位元,用  $\Sigma^+$  表示  $\Sigma$  上所有非空字组成的半群。称  $\Sigma^*$  的子集为字母表  $\Sigma$  上的语言,把字母表  $\Sigma$  上所有语言组成的集合记为  $\psi(\Sigma^*)$ ,对于  $L_1, L_2 \in \psi(\Sigma^*)$ ,定义  $L_1L_2 = \{w_1w_2 | w_1 \in$

$L_1, w_2 \in L_2\}$ ,则  $\psi(\Sigma^*)$  是幺半群,其单位元为空字语言  $\{\varepsilon\}$ 。 $\psi(\Sigma^*)$  关于集合的并、交、补运算作成布尔半环。

Melay 机是带有输出的有限自动机,它是一个 7 元组  $\Gamma = (Q, \Sigma, \Omega, I, T, \delta, \eta)$ 。其中, $Q$  是有限状态集合; $\Sigma$  是有限字母表; $\Omega$  是输出字母表; $I$  是  $Q$  的子集,称为初始状态集合; $T$  是  $Q$  的子集,称为终状态集合; $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$  是部分映射,称为状态转换映射; $\eta: Q \times \Sigma \rightarrow \Omega$  是部分映射,称为输出映射。对于  $\Sigma$  中的字  $x_1x_2 \cdots x_k$  及状态  $q \in Q$ ,定义状态转换为:

$$\delta(q, x_1x_2 \cdots x_k) = \delta(\delta(q, x_1x_2 \cdots x_{k-1}), x_k)$$

对于  $\Sigma$  中的非空字  $x_1x_2 \cdots x_k$  及状态  $q \in Q$ ,定义输出为:

$$\eta(q, x_1x_2 \cdots x_k) = \eta(q, x_1) \cdots \eta(\delta(q, x_1x_2 \cdots x_{k-1}), x_k)$$

定义 Melay 机  $\Gamma$  识别的语言为  $L(\Gamma) = \{w \in \Sigma^+ | i \in I, \delta(i, w) \in T\}$ ,定义 Melay 机  $\Gamma$  关于输入  $w \in \Sigma^+$  的输出语言为  $O^w(\Gamma) = \{\eta(i, w) | i \in I\}$ 。如果 Melay 机的输出映射为  $\eta: Q \rightarrow \Omega$ ,则称其为 Moore 机。

数学形态学运算关心的是最后一的输出。因此对于数学形态学运算, Melay 机的输出定义如下。

定义 1 Melay 机  $\Gamma$  的形态学输出映射定义为:

$$\eta_k: Q \times \Sigma^+ \rightarrow \Omega$$

$$\eta_k(q, x_1x_2 \cdots x_k) = \eta(\delta(q, x_1x_2 \cdots x_{k-1}), x_k)$$

并且定义输入  $w \in \Sigma^+$  的形态学输出为  $O_k^w(\Gamma) = \{\eta_k(i, w) | i \in I\}$ 。

为了用自动机实现图像的开运算,首先用自动机实现腐蚀运算。

对于腐蚀运算  $A \ominus B$  的 Melay 机  $\Gamma$  的构造如下。以  $Q = A \cup (A)_{-b_1}$  为状态集合,其中  $b_1 \in B$ ; 输入字母表  $\Sigma = B \cup \tilde{B}$ ,其中, $\tilde{B}$  是  $B$  的拷贝(即  $\tilde{B}$  是与  $B$  元素个数相等的一个集合),且  $B \cap \tilde{B} = \phi$ ; 输出字母表  $\Omega = (A)_{-b_1}$ ,初始状态集合  $I = A$ ,终状态集  $T = (A)_{-b_1}$ 。令  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ ,  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ ,  $\tilde{B} = \{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_n\}$ 。

状态转换映射  $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow \Omega$  定义为:若  $a_i - b_1 + b_j = a_k \in A$ ,则  $\delta(a_i - b_1, b_j) = a_i - b_1 + b_j = a_k$ ;若  $a_i - b_j = a_k - b_1$ ,则  $\delta(a_i, \tilde{b}_j) = a_i - b_j = a_k - b_1$ 。

输出映射  $\eta: Q \times \Sigma \rightarrow \Omega$  定义为:若  $a_i - b_j = a_k - b_1$ ,则  $\eta(a_i, \tilde{b}_j) = a_i - b_j = a_k - b_1$ 。

其中, $i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$ 。

定理 1  $O_k^{\tilde{b}_1\tilde{b}_2\tilde{b}_3\cdots\tilde{b}_n}(A) = A \ominus B$ 。

下面考查开运算。为此,需要将 Melay 机的定义推广为  $\varepsilon$ -Melay 机。

定义 2 在 Melay 机的定义中将输出映射的值域扩充到  $\eta: Q \times \Sigma \rightarrow \Omega \cup \{\varepsilon\}$ ,即允许空字  $\varepsilon$  作为输出,所得到的自动机称为  $\varepsilon$ -Melay 机。

由开运算的定义可见, $A \circ B$  由图像  $x+B$  组成,其中  $x \in (A \ominus B)$ 。在下面将采取这样的观点,即  $A \circ B = \{x+B |$

$x \in (A \ominus B)$ 。

对于开运算  $A \circ B$  的  $\varepsilon$ -Melay 机  $\Delta$  的构造如下。以  $Q=A \cup (A)_{-b_i}$  为状态集合, 其中  $b_i \in B$ , 输入字母表  $\Sigma=B \cup \tilde{B}$ , 其中  $\tilde{B}$  是  $B$  的拷贝 (即  $\tilde{B}$  是与  $B$  元素个数相等的一个集合), 且  $B \cap \tilde{B}=\phi$ , 输出字母表  $\Omega=A$ , 初始状态集合  $I=A$ , 终状态集  $T=(A)_{-b_i}$ 。令  $A=\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ ,  $B=\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ ,  $\tilde{B}=\{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_n\}$ 。

状态转换映射  $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow \Omega$  定义为: 若  $a_i - b_1 + b_j = a_k \in A$ , 则  $\delta(a_i - b_1 \cdot b_j) = a_i - b_1 + b_j = a_k$ ; 若  $a_i - b_j = a_k - b_1$ , 则  $\delta(a_i, \tilde{b}_j) = a_i - b_j = a_k - b_1$ 。

输出映射  $\eta: Q \times \Sigma \rightarrow \Omega$  定义为:  $\eta(a_i, \tilde{b}_j) = a_i$ ,  $\eta(a_i - b_1, \tilde{b}_j) = \varepsilon$ 。

其中,  $i=1, 2, \dots, m$ ;  $j=1, 2, \dots, n$ ;  $\varepsilon$  是空字。

定理 3  $O^{\tilde{b}_1 \tilde{b}_2 \tilde{b}_3 \dots \tilde{b}_n}(\Delta) = A \circ B$ 。

在通用计算机上二值图像开运算  $A \circ B$  的串行算法如下:

(1) 对  $A$ 、 $B$  中的像素点分别编号。设  $A=\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ ,  $B=\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ 。

(2) 求出开运算  $A \ominus B$ :

Begin

$A \ominus B = \phi$ ;

for  $i=1$  to  $m$

$x_i = a_i - b_1$ ;

for  $j=1$  to  $n$

$x_i = x_i - b_j$ ;

if  $x_i = x_i + b_j \in A$

$x_i = a_i - b_1$ ;

$A \ominus B = (A \ominus B) \cup \{x_i\}$ ;

$j++$ ;

else

$A \ominus B = (A \ominus B) - \{x_i\}$ ;

$i++$ ;

End

(3) 求出开运算  $A \circ B$ 。设由步骤(2)求得  $A \ominus B = \{c_1, c_2, \dots, c_p\}$ , 则  $A \circ B$  为:

Begin

$A \circ B = \phi$ ;

for  $i=1$  to  $p$

$x_i = c_i$ ;

for  $j=1$  to  $n$

$x_i = x_i + b_j$ ;

$A \circ B = A \circ B \cup \{x_i\}$

$j++$ ;

$i++$ ;

End

二值图像开运算的自动机的并行结构示意图如图 1 所示。

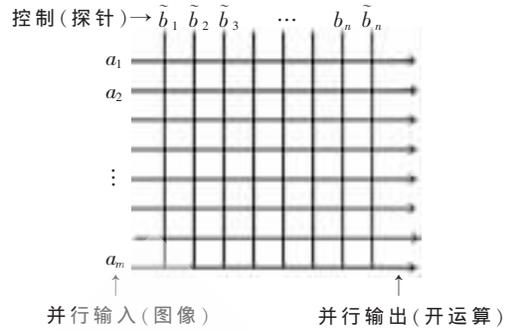


图 1 开运算自动机的并行结构示意图

设图像  $A$  含有  $m$  个像素点, 探针  $B$  含有  $n$  个像素点。关于开运算的算法复杂度有如下结论。在通用计算机上, 完成开运算需要串行地进行  $2m \times n$  次加减法和  $m \times n$  次查找, 而在开自动机上完成仅需要并行地进行  $2n-1$  次加减法和  $n-1$  次查找。因此, 利用有限自动机实现图像开运算, 其时间复杂度仅取决于探针的像素个数  $n$ , 而与图像的像素个数  $m$  无关。由于在图像处理中探针通常要比图像小得多, 因此用有限自动机实现开运算对降低运算的时间复杂度是有效的。

用开运算的有限自动机可以降低运算的时间复杂度。然而, 开运算结果的优劣取决于探针的选择, 并将直接影响到数字图像处理的效果, 只有探针选择恰当, 开运算才有价值。因此, 利用有限自动机实现探针选取是一项有意义的工作。

参考文献

- [1] GOLAY M J E. Hexagonal parallel pattern transformations[J]. IEEE Transactions on Computers, 1969, 18(8): 733-740.
- [2] GRAHAM M D, NORGRÉN P E. The Diff3 analyzer: a parallel/serial Golay image processor[C]. Real Time Medical Image Processing, 1980: 163-182.
- [3] KRUSE B. Design and implementation of a picture processor [D]. Linköping: University of Linköping, 1977.
- [4] KLEIN J C, SERRA J. The texture analyzer [J]. Journal of Microscopy, 1977(95): 349-356.
- [5] DUFF M J B. Parallel processors for digital image processing [C]. Proceedings of the International Symposium, Bad Neuenahr, 1979: 265-279.
- [6] LOUGHEED R M, MCCUBBREY D L. The cytocomputer: a practical pipelined image processor[C]. Proceedings of IEEE Annual Symposium on Computer Architecture, France, 1980: 271-278.
- [7] GERRITSEN F A, AARDEMA L G. Design and use of DIP-1: a fast flexible and dynamically microprogrammable image processor[J]. Pattern Recognition, 1981, 14(6): 319-330.
- [8] NACHTEGAEL M, SUSSNER P, MELANGE T. On the role of complete lattices in mathematical morphology: from tool to uncertainty model[J]. Information Sciences, 2011(181):

《微型机与应用》2012年 第31卷 第12期

- 1971-1988.
- [9] KARI J. Image processing using finite automata[J]. Studies in Computational Intelligence, 2006(25):171-208.
- [10] TISCHIER G. Theory and applications of parametric weighted finite automata[D]. Wurzburg: University of Wurzburg, 2008.
- [11] DROSTE M, KUICH J, VOGLER H. Handbook of weighted automata[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2009.
- [12] LIU Y J. Regular component decomposition of regular languages[J]. Theoretical Computer Science, 2003,299:734-749.
- [13] LIU Y J, XU Z B. Semigroup method in combinatorics on words[J]. Chinese Journal of Computer, 2005,28: 1138-1145.

(收稿日期:2012-05-22)

作者简介:

刘耀军,男,1963年生,博士,教授,主要研究方向:形式语言与自动机、数字图像处理。

张姍梅,女,1964年生,硕士,副教授,主要研究方向:半群代数理论、数字图像处理。

