邻近交叉路口交通灯数学模型

付志培，刘 林
（合肥工业大学 管理学院，安徽 合肥 230009）

摘 要：提出了一种新的邻近交叉路口交通数学模型，并用线性规划解决了邻近交叉路口中间路段容纳车辆有限的情况下，如何确定每个路口的交通灯时间分配以及邻近交叉路口交通灯的相位差，实现单位时间内路口车辆的总积累队长最少，从而缓解交通堵塞。

关键词：邻近交叉路口；交通灯；交通周期
中图分类号：U121 **文献标识码**：A **文章编号**：1674-7720(2012)10-0091-03

A new mathematical model of traffic lights of the neighborhood intersection

Fu Zhipei，Liu Lin
(Department of Management，Hefei University of Technology，Hefei 230009，China)

Abstract：In this paper，a new traffic mathematics model of neighborhood intersection is proposed，and with limiting vehicles in the middle section of the adjacent crossings，how to determine the traffic light time distribution of each crossing and phase difference of traffic lights in the neighborhood intersection are studied by LP，to get the least total vehicles in unit time，to further ease the traffic jams.

Key words：neighborhood intersection；traffic lights；transport cycle

不恰当的邻近交叉路口的交通灯配时往往是城市交通堵塞的一个重要原因，例如邻近交叉路口中间路段的等待车辆总量已经超过了其最大容量，但上游路口依然处于绿灯的情形下，更多的车辆会选择继续行驶，从而占据了交叉路口的禁停区域，导致整个交通瘫痪。基于这样的考虑，本文旨在研究邻近交叉路口中间路段容纳车辆有限的情况下，如何确定交通周期和两个交叉路口交通灯之间的相位差，实现单位时间内上游路口车辆的积累队长最短，从而缓解交通堵塞的发生。

交通问题已经成为现代社会的热点问题，并引起国内外学者的广泛研究。柴磊、沈国江、叶炜建立了一种宏观动态确定性模型的交通流，并应用模糊控制原理，设计了一种基于车辆等待长度、路口多相位的交通灯感应智能控制策略[1]；YAN F、DRIDI M 和 MOUDNI A E 将每辆车看做孤立的，并建立拥堵情况下的交通模型，用分支定界法来求解交通系统中总的最小等待时间[2]；PEDRAZA L F 设计了一条主线路下邻近多个交通路口的模型，并利用模糊控制理论解决拥堵情况下的交通流最大化问题[3]；HIRANKITT V 和 KROHKAEW J 用遗传算法解决城市交通网中的最大流问题[4]；HHUANG Y S 和 SU P J 将交通系统描述为一种类似计算机网络的模型——Time Coloured Petri Nets (TCPNs)，并利用计算机中 TCP/IP 协议的工作原理来解决城市交通拥堵问题[5]。

1 模型的建立与分析

1.1 交叉路口示意图标号

邻近交叉路口交通图如图 1 所示，在一个交通周期内定义：μ_{ik} 为各路口右转（即 $a_{i1}, b_{i1}, c_{i1}, d_{i1}$）的绿灯时间；$m_{ik}^*$ 为各路口右转（即 $a_{i1}, b_{i1}, c_{i1}, d_{i1}$）的红灯时间；$t_{ik}$ 为各路口左转（即 $a_{i3}, b_{i3}, c_{i3}, d_{i3}$）的绿灯时间；$t_{ik}^*$ 为各路口左转（即 $a_{i3}, b_{i3}, c_{i3}, d_{i3}$）的红灯时间；$\varphi_{ik}$ 为各路口直行（即 $a_{i2}, b_{i2}, c_{i2}, d_{i2}$）的绿灯时间；$j_{ik}^*$ 为各路口直行（即 $a_{i2}, b_{i2}, c_{i2}, d_{i2}$）的红灯时间；$\theta$ 为各路口通过人行道所花费的时间；Q 为两路口中间右行路段所能容纳的总车辆；a_{ij}、b_{ij}、c_{ij}、d_{ij} 分别代表了各路口的行驶方向以及车辆速度。其中 i=1,2，代表交叉路口 1 和交叉路口 2；k=a,b,c,d，代表交叉路口的 4 个分路口；j=1,2,3，分别表示车辆右转、直行和左转。

1.2 模型分析

假设：在拥堵的情况下，车辆是匀速行驶；车辆行驶过程中严格遵守交通规则；邻近路口交通周期相同，且忽

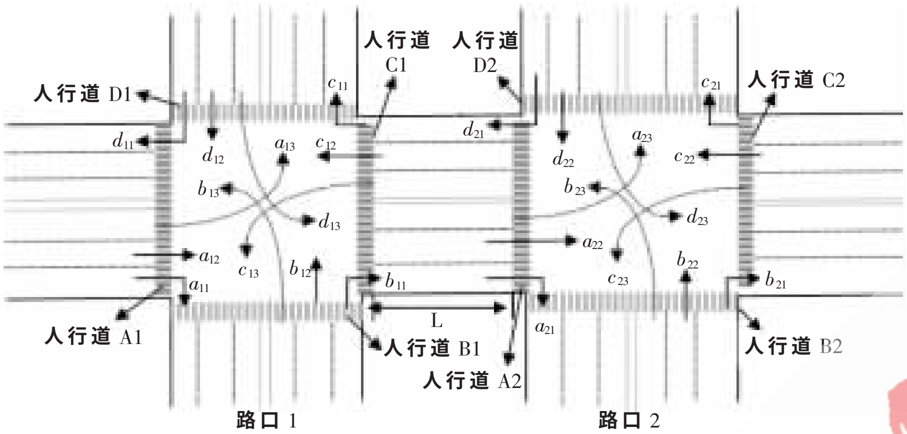

图 1 邻近交叉路口交通示意图

略黄灯对交通流的影响。在此情况下对模型进行分析。

(1)目标函数的确定

一个交通周期即在一个交叉路口或者丁字路口，所有不可能同时亮的绿灯依次亮一遍所用的总时间[6]。由于考虑到各路口右拐车道可以在人行道为红灯时设置为绿灯，故可以充分保证行人的安全，又可以将更多的绿灯时间分配给直行和左拐车辆。

如图 2 所示，在路口 1 中，直行 a_{12} 为绿灯时，人行道 B1、D1 和直行道 c_{12} 为绿灯；当人们用 θ 时间穿越人行道之后，全部右拐车道变绿灯；当 a_{12} 和 c_{12} 变红灯后，左拐 a_{13} 和 c_{13} 变绿灯，此时，全部右拐车道仍为绿灯；当 a_{13} 和 c_{13} 变绿灯后，b_{12} 和 d_{12} 变绿灯，此时，全部右拐车道仍为绿灯；当过了$(\varphi_{1b}-\theta)$时间之后，全部右转车道变红灯，人行道 A1 和 C1 变绿灯；当直行 b_{12} 和 d_{12} 变红灯后，人行道 A1 和 C1 变红灯，同时左转 b_{13} 和 d_{13} 变绿灯。由于交叉路口的对称关系，此时完成一个交通周期，则路口 1 的交通周期为：

$$T=\varphi_{1a}+t_{1a}+\varphi_{1b}+t_{1b} \tag{1}$$

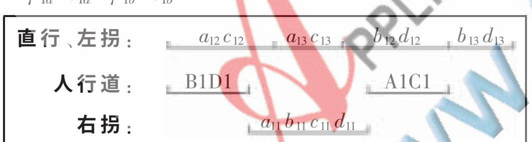

图 2 路口 1 绿灯配时图

单个交叉路口的单位时间内车辆积累队长最少可以使交通更为通畅，即目标函数为：

$$\min\ Z=\frac{\sum(v_{ik}\times t_{ik红})}{T} \tag{2}$$

其中，v_{ik} 为路口各相位的车队数量增加速度(近似为车辆到达速度)，$t_{ik红}$为路口各相位的红灯时间。

为方便计算，将红灯时间转换为绿灯时间。例如，$j_{ik红}=t_{1a}+j_{1b}+t_{1b}$。此时令：

$$\begin{aligned}
A&=2\times(a_{11}+b_{11}+c_{11}+d_{11})\\
B&=(a_{13}+c_{13}+b_{12}+d_{12}+b_{13}+d_{13})\\
C&=(a_{12}+c_{12}+b_{12}+d_{12}+b_{13}+d_{13})\\
D&=(a_{12}+c_{12}+a_{13}+c_{13}+b_{13}+d_{13})\\
E&=(a_{11}+b_{11}+c_{11}+d_{11}+a_{12}+c_{12}+a_{13}+c_{13}+b_{12}+d_{12})
\end{aligned} \tag{3}$$

则：

$$\min\ Z=\frac{A\times\theta+B\times\varphi_{1a}+C\times t_{1a}+D\times\varphi_{1b}+E\times t_{1b}}{\varphi_{1a}+t_{1a}+\varphi_{1b}+t_{1b}} \tag{4}$$

(2)约束条件的确定

为了保持道路畅通性，建议邻近交叉路口的交通灯周期留有时间差 u(即下游路口的红绿灯配时比上游路口提前时间 u)，以保证整个交通周期中，上游路口驶入的车量总数与中间路段等待车辆总数始终小于中间路段所能容纳的最大车辆数 Q。因此，设原先中间路口等待车辆为 Q_0，则在下游路口直行 a_{22} 由绿灯变为红灯过程中，需满足：

$$Q_0+\int_0^u d_{13}\mathrm{d}t+\int_u^{\varphi_{2a}} a_{12}\mathrm{d}t+\int_{\theta+u}^{\varphi_{2a}} b_{11}\mathrm{d}t-\int_0^{\varphi_{2a}} a_{22}\mathrm{d}t-\int_0^{\varphi_{2a}} a_{21}\mathrm{d}t\leqslant Q \tag{5}$$

在下游路口左转 a_{23} 由绿灯变为红灯过程中，记：

$$Q_0+\int_0^u d_{13}\mathrm{d}t+\int_u^{\varphi_{2a}} a_{12}\mathrm{d}t+\int_{\theta+u}^{\varphi_{2a}} b_{11}\mathrm{d}t-\int_0^{\varphi_{2a}} a_{22}\mathrm{d}t-\int_0^{\varphi_{2a}} a_{21}\mathrm{d}t=Q_1 \tag{6}$$

则需满足：

$$Q_1+\int_{\varphi_{2a}}^{u+\varphi_{1a}} a_{12}\mathrm{d}t+\int_{\varphi_{2a}}^{\varphi_{2a}+t_{2a}} b_{11}\mathrm{d}t-\int_{\varphi_{2a}}^{\varphi_{2a}+t_{2a}} a_{23}\mathrm{d}t-\int_{\varphi_{2a}}^{\varphi_{2a}+t_{2a}} a_{21}\mathrm{d}t\leqslant Q \tag{7}$$

由于下游路口右拐 a_{21} 红灯之后没有车辆从下游路口驶出，记：

$$Q_1+\int_{\varphi_{2a}}^{u+\varphi_{1a}} a_{12}\mathrm{d}t+\int_{\varphi_{2a}}^{\varphi_{2a}+t_{2a}} b_{11}\mathrm{d}t-\int_{\varphi_{2a}}^{\varphi_{2a}+t_{2a}} a_{23}\mathrm{d}t-\int_{\varphi_{2a}}^{\varphi_{2a}+t_{2a}} a_{21}\mathrm{d}t=Q_2 \tag{8}$$

则需满足：

$$Q_2+\int_{\varphi_{2a}+t_{2a}}^{\theta+u+\mu} b_{11}\mathrm{d}t+\int_{u+\varphi_{1a}+t_{1a}+\varphi_{1b}}^{\varphi_{2a}+t_{2a}+\varphi_{2b}+t_{2b}} d_{13}\mathrm{d}t-\int_{\varphi_{2a}+t_{2a}}^{\theta+\mu} a_{21}\mathrm{d}t\leqslant Q \tag{9}$$

在上述式(5)~式(9)中，如果 $m=\int_j^i k\mathrm{d}t$ 中 $i<j$，则 $\int_j^i k\mathrm{d}t=0$。

由式(2)假设条件以及图 2 分析可得：

$$t_{1a}=t_{2a},\ t_{1b}=t_{2b},\ j_{1a}=j_{2a},\ j_{1b}=j_{2b},\ \mu_{1a}=\mu_{1b} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
&\mu_{1a\max}\geqslant\mu_{1a}=t-2\theta-t_{1b}=j_{1a}+t_{1a}+j_{1b}-2\theta\geqslant\mu_{1a\min}\\
&j_{1a\max}\geqslant j_{1a}\geqslant j_{1a\min};\ t_{1a\max}\geqslant t_{1a}\geqslant t_{1a\min}\\
&j_{2a\max}\geqslant j_{2a}\geqslant j_{2a\min};\ t_{1a\max}\geqslant t_{1a}\geqslant t_{1a\min}
\end{aligned} \tag{11}$$

2 案例分析与结论

以高峰期的合肥胜利路为例，记胜利路与寿春路交叉口为上游路口 1，与明光路交叉口为下游路口 2。由实际道路情况和经验交通可以确定式(11)中：

$$120\geqslant\mu_{1a}\geqslant 20$$

$$120\geqslant j_{1a}\geqslant 30,\ 120\geqslant t_{1a}\geqslant 20$$

$$120\geqslant j_{1b}\geqslant 30,\ 120\geqslant t_{1a}\geqslant 30$$

经过处理得到：$Q\approx 150$，$Q_0\approx 90$，$\theta\approx 20$，其他数据则如表 1 所示。

表 1 实测邻近交叉路口 1 和 2 的数据

路口	右拐/(辆/s)	直行/(辆/s)	左转/(辆/s)
a_1	1.321 7	1.352 3	1.312 5
a_2	1.053 5	1.001 1	1.162 6
b_1	1.405 2	1.413 0	1.391 2
c_1	1.302 4	1.350 3	1.321 3
d_1	1.391 8	1.404 7	1.408 9

胜利路与寿春路交叉口的红绿灯配时如图 3 所示。其绿灯时间分别为 40 s、20 s、40 s 和 20 s。

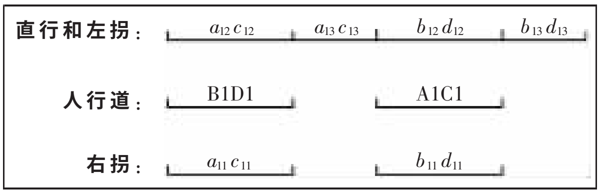

图 3 实测交通灯模型

对于路口 1，每秒积累的车辆总队长为 Z=11.822 5。整个交通周期中的第 34.1 s 时，中间路段的等待车辆已经超过其最大容量 Q=150，而上游路口通往中间路段的红绿灯已经处在绿灯状态，则势必有更多的车辆占据交叉路口 1 而停车等待，从而造成整个交通瘫痪。采用本文的交通模型，经计算得：z=9.952 3，j_{1a}=38，t_{1a}=16，j_{1b}=43，t_{1b}=23，u=25。在充分保证行人穿越马路的安全性的情况下，不但减少了车辆的总排队长，而且中间路段的等待车辆始终保持在最大等待车辆数之内，从而降低了交通瘫痪的发生概率，使城市交通井然有序。

参考文献

[1] 柴磊，沈国江，叶炜.单交叉路口交通流模型及其交通灯智能控制策略[C].第六届全球智能控制与自动化大会论文集，2006：8558-8562.

[2] YAN F，DRIDI M，MOUDNI A E.Control of traffic lights in intersection：a new branch and bound approach[C].2008 International Conference on IEEE，2008.

[3] PEDRAZA L F.Intelligent model traffic light for the city of Bogota[C].Electronics，Robotics and Automotive Mechanics Conference，2008.

[4] HIRANKITTI V，KROHKAEW J.An agent approach for intelligent traffic-light control[C].Proceedings of the First Asia International Conference on Modelling & Simulation，2007.

[5] HHUANG Y S，SU P J.Modelling and analysis of traffic light control systems[J].IET Control Theory and Applications，IET，2009(3)：340-350.

[6] 华年.交通灯数学模型[J].数学的实践与认识，2006，36(5)：11-17.

(收稿日期：2012-02-16)

作者简介：

付志培，男，1985 年生，硕士研究生，主要研究方向：交通信号优化。

刘林，男，1964 年生，博士，副教授，硕士生导师，主要研究方向：运筹决策。