

B-样条曲面的保凸拼接*

金席卷¹,姚杰²,方逵²(1.长沙大学 电子与通信工程系,湖南 长沙 410003;
2.湖南农业大学 信息科学技术学院,湖南 长沙 410128)

摘要: 利用参数曲面局部凸的条件,导出了(准)均匀 B-样条曲面局部凸的充分条件。证明了带有凸的平行四边形控制子网格的(准)均匀 B-样条曲面片的凸的。给出了(准)均匀 B-样条曲面保凸拼接的控制顶点算法,并给出了几个三次 B-样条曲面保凸拼接实例。

关键词: B-样条曲面;平行四边形控制子网格;凸性;保凸拼接

中图分类号: TP391.41

文献标识码: A

文章编号: 1674-7720(2011)23-0051-03

Convexity preserving connection for B-spline surfaces

Jin Xijuan¹, Yao Jie², Fang Kui²(1.Department of Electronic and Communication, Changsha University, Changsha 410003, China;
2.College of Information Science & Technology, Hunan Agricultural University, Changsha 410128, China)

Abstract: In this paper, based on the locally convex conditions of parametric surfaces, the sufficient conditions of locally convex uniform B-spline surfaces are derived. It proves that the uniform B-spline surfaces patches with the parallel quadrilateral control nets are the convex surfaces. The algorithms for convexity preserving connection for uniform B-spline surfaces are given. Finally, a few examples are given.

Key words: B-spline surfaces; parallel quadrilateral control nets; convexity; convexity preserving connection

对于参数曲线曲面的凸性问题,国内外已有很多学者研究。参数 Bezier 曲线的凸性问题, Liu C 和刘鼎元等已基本解决^[1-2]。参数曲面的凸性研究一直是人们感兴趣的问题,常庚哲等得到了三角域上非参数 Bezier 曲面的凸性条件^[3],Zhi L 等导出了三角域上参数 Bezier 曲面的凸性条件^[4]。KORAS G D 和 KAKLIS P D 得到了一般矩形域上参数曲面凸的充要条件^[5]。

工业产品形状的数学描述重在解决曲面的数学描述。由于实际形状的复杂性,用单一曲面往往难以实现,很多时候都采用拼接曲面。由于 B-样条曲面本身是组合曲面,构造一个 $k \times l$ 次拼接曲面只需增加一排 k 个或 l 个控制点,且拼接曲面能保持比次数低一阶的导数连续。根据 B-样条曲面的局部性质,可以完成任意多张曲面片的保凸拼接,将一张小的曲面片扩张成较大的曲面。最后用几个实验实现了多张三次曲 B-样条面片的保凸拼接,达到了较为理想的效果。

1 参数曲面的凸性

设有参数曲面 $\Sigma: r=r(u, v)$, 对曲面 Σ 上任何一点 P , 设曲面在点 P 的法向量为 n , 过点 P 的切平面为 π 。切平面 π 将欧氏空间 R^3 分成两个半空间, 沿点 P 的法向量 n 的正向指向的半空间为切平面的上半空间, 另一个半空间为下半空间, 包含切平面 π 的半空间称为闭半空间。

定义 1 设有参数曲面 $\Sigma: r(u, v), (u, v) \in D \subset R^2$, 如果 $\forall (u, v) \in D$, 若 $r_u \times r_v \neq 0$, 则称 Σ 是正则曲面。

从全局凸的角度, WILHELM K^[6] 给出了凸曲面的原始几何定义。

定义 2 一个正则曲面 $\Sigma: r(u, v), (u, v) \in D \subset R^2$, 如果 $\forall (u, v) \in D$, 曲面 Σ 完整地处在 P 点的切平面的闭上

* 基金项目: 湖南省科技重大专项(2010J05)

半空间(闭下半空间),则称该曲面是全局凸曲面。

平面是一个特殊的全局凸曲面。全局凸曲面的判别是十分困难的,至今还没有代数判别方法,只能用原始的几何定义。

定义 3 设有正则曲面 $\sum : r(u, v), (u, v) \subset D \in R^2, P$ 是曲面 \sum 上的任意一点, 如果对于过 P 点的任一条法截线都存在 P 点的某个邻域, 在该邻域内, 法截线对应的曲线段完整地处在 P 点切平面的上半空间(下半空间), 则 \sum 称是局部凸曲面。

显然, 全局凸曲面是局部凸曲面。

KORAS G D 和 KAKLIS P D^[5]给出了局部凸曲面的充分必要条件:

引理 1^[6] 正则曲面 $\sum : r(u, v), (r(u, v) \in C^2(D), D \in R^2)$ 为局部凸的充要条件是: $L \geq 0, N \geq 0, LN - M^2 \geq 0$ 或 $L \leq 0, N \leq 0, LN - M^2 \geq 0$ 。

2 B-样条曲面的凸性分析

给定 $(m+1) \times (n+1)$ 个控制顶点 $d_{i,j} (i=0, 1, \dots, m; j=0, 1, \dots, n)$ 的阵列, 构成一张控制网格。又分别给定参数 u 与 v 的次数 k 与 l 和两个节点矢量 $U=[u_0, u_1, \dots, u_{m+k+1}]$ 与 $V=[v_0, v_1, \dots, v_{n+l+1}]$ 。

$k \times l$ 次张量积 B-样条曲面为

$$s(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n d_{i,j} N_{i,k}(u) N_{j,l}(v), u_k \leq u \leq u_{m+1}, v_l \leq v \leq v_{n+1} \quad (1)$$

其中, B-样条基 $N_{i,k}(u) (i=0, 1, \dots, m)$ 与 $N_{j,l}(v) (j=0, 1, \dots, n)$ 分别由节点矢量 U 与 V 按 de Boor-Cox 递推公式决定。B-样条曲线的局部性质可以推广到曲面。因此定义在子矩形域 $u_e \leq u \leq u_{e+1}, v_f \leq v \leq v_{f+1}$ 上那块 B-样条子曲面片仅和控制点阵中的部分顶点 $d_{i,j} (i=e-k, e-k+1, \dots, e; j=f-l, f-l+1, \dots, f)$ 有关, 而与其他顶点无关。相应地, 式(1)就可改写为分片表示形式:

$$r(u, v) = \sum_{i=e-k}^e \sum_{j=f-l}^f d_{i,j} N_{i,k}(u) N_{j,l}(v), u \in [u_e, u_{e+1}] \subset [u_k, u_{m+1}], v \in [v_f, v_{f+1}] \subset [v_l, v_{n+1}] \quad (2)$$

$k \times l$ 次张量积 B-样条曲面的一阶偏导矢和二阶偏导矢分别为:

$$r_u(u, v) = \sum_{i=e-k}^{e-1} \sum_{j=f-l}^f d_{ij}^{10} N_{i,k-1}(u) N_{j,l}(v)$$

$$r_v(u, v) = \sum_{i=e-k}^e \sum_{j=f-l}^{f-1} d_{ij}^{01} N_{i,k}(u) N_{j,l-1}(v)$$

$$r_{uu}(u, v) = \sum_{i=e-k}^{e-2} \sum_{j=f-l}^f d_{ij}^{20} N_{i,k-2}(u) N_{j,l}(v)$$

$$r_{vv}(u, v) = \sum_{i=e-k}^e \sum_{j=f-l}^{f-2} d_{ij}^{02} N_{i,k}(u) N_{j,l-2}(v)$$

$$r_{uv}(u, v) = \sum_{i=e-k}^{e-1} \sum_{j=f-l}^{f-1} d_{ij}^{11} N_{i,k-1}(u) N_{j,l-1}(v)$$

$$(r_u, r_v, r_{uv}) = \sum_{i_j \neq i_{j+1}} N_{i_j, k-2}(u) N_{i_{j+1}, l}(v) (d_{ij}^{10}, d_{ij}^{01}, d_{ij}^{20})$$

$$(r_u, r_v, r_{uv}) = \sum_{i_j \neq i_{j+1}} N_{i_j, k-2}(u) N_{i_{j+1}, l-2}(v) (d_{ij}^{10}, d_{ij}^{01}, d_{ij}^{02})$$

$$(r_u, r_v, r_{uv}) = \sum_{i_j \neq i_{j+1}} N_{i_j, k-1}(u) N_{i_{j+1}, l-1}(v) (d_{ij}^{10}, d_{ij}^{01}, d_{ij}^{11})$$

其中, $N_{i_j, k-1} = N_{i_j, k-1}(u) N_{j, l}(v) N_{i_{j+1}, k}(u) N_{j, l-1}(v)$

$$d_{ij}^{10} = k \frac{d_{i+1, j} - d_{i, j}}{u_{i+k} - u_i} = \frac{k}{u_{i+k} - u_i} \Delta^{1,0} d_{i, j}$$

$$d_{ij}^{01} = l \frac{d_{i, j+1} - d_{i, j}}{v_{j+l} - v_j} = \frac{l}{v_{j+l} - v_j} \Delta^{0,1} d_{i, j}$$

$$d_{ij}^{20} = (k-1) \frac{d_{i+1, j}^{10} - d_{i, j}^{10}}{u_{i+k-1} - u_i} = \frac{k(k-1)}{u_{i+k-1} - u_i} \left(\frac{\Delta^{1,0} d_{i+1, j}}{u_{i+k-1} - u_{i+1}} - \frac{\Delta^{1,0} d_{i, j}}{u_{i+k} - u_i} \right)$$

$$d_{ij}^{02} = (l-1) \frac{d_{i, j+1}^{01} - d_{i, j}^{01}}{v_{j+l-1} - v_{j+1}} = \frac{l(l-1)}{v_{j+l-1} - v_{j+1}} \left(\frac{\Delta^{0,1} d_{i, j+1}}{v_{j+l} - v_{j+1}} - \frac{\Delta^{0,1} d_{i, j}}{v_{j+l} - v_j} \right)$$

$$d_{ij}^{11} = l \frac{d_{i, j+1}^{10} - d_{i, j}^{10}}{v_{j+l} - v_j} = \frac{lk}{(v_{j+l} - v_j)(u_{i+k} - u_i)} (\Delta^{1,0} d_{i, j+1} - \Delta^{1,0} d_{i, j})$$

由引理 1 易得到下面的结论。

推论 1 B-样条曲面为局部凸, 当且仅当下列不等式成立:

$$[r_u, r_v, r_{uv}] \geq 0, [r_u, r_v, r_{uv}] \geq 0$$

$$[r_u, r_v, r_{uv}][r_u, r_v, r_{uv}] - [r_u, r_v, r_{uv}]^2 \geq 0$$

或

$$[r_u, r_v, r_{uv}] \leq 0, [r_u, r_v, r_{uv}] \leq 0$$

$$[r_u, r_v, r_{uv}][r_u, r_v, r_{uv}] - [r_u, r_v, r_{uv}]^2 \leq 0$$

接下来主要研究均匀和准均匀 B-样条曲面的凸性。因为(准)均匀 B-样条的端点外所有节点区间长度 $\Delta_i = u_{i+1} - u_i = \text{常数} > 0$, 所以上式中的 d_{ij}^{20} 与 d_{ij}^{02} 可化简为:

$$d_{ij}^{20} = \frac{k(k-1)}{(u_{i+k} - u_i)(u_{i+k-1} - u_j)} \Delta^{2,0} d_{i, j}$$

$$d_{ij}^{02} = \frac{l(l-1)}{(v_{j+l} - v_j)(v_{j+l-1} - v_j)} \Delta^{0,2} d_{i, j}$$

根据推论 1 及上面的公式, 可得到 B-样条曲面片局部凸的一个充分条件。

定理 1 (准)均匀 $k \times l$ 次 B-样条曲面片(式(2))局部凸的充分条件是

$$\begin{cases} (\Delta^{1,0} d_{i, j}, \Delta^{0,1} d_{\delta, \eta}, \Delta^{2,0} d_{s, t}) \geq 0 (\leq 0) \\ (\Delta^{1,0} d_{i, j}, \Delta^{0,1} d_{\delta, \eta}, \Delta^{0,2} d_{\alpha, \beta}) \geq 0 (\leq 0) \\ (\Delta^{1,0} d_{i, j}, \Delta^{0,1} d_{\delta, \eta}, \Delta^{1,1} d_{\gamma, \xi}) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

其中, $i, \gamma = e-k, e-k+1, \dots, e-1; j, t = f-1, f-l+1, \dots, f; \delta, \alpha = e-k+1, \dots, e; \eta, \xi = f-l, f-l+1, \dots, f-1; s = e-k, e-k+1, \dots, e-2; \beta = f-l, f-l+1, f-2$ 。

当 $k \times l$ 次(准)均匀 B-样条曲面(式(2))的控制网格是凸的, 且控制子网格是平行四边形时, 有:

《微型机与应用》2011年第30卷第23期

$$(\Delta^{1,0}d_{i,j}, \Delta^{0,1}d_{\delta,\eta}, \Delta^{1,1}d_{\gamma,\xi})=0$$

于是,由上面的定理有以下推论。

推论 2 当 $k \times l$ 次(准)均匀 B-样条曲面(式(2))的控制网格是凸的,且控制子网格是平行四边形,则(准)均匀 B-样条曲面是局部凸的。

但对于 $(m+1) \times (n+1)$ 个控制顶点 $d_{i,j}(i=0,1,\dots,m; j=0,1,\dots,n)$ 组成的一张 B-样条曲面来说,情况与 Bézier 曲面略有区别。因为 B-样条曲面是一类组合样条曲面,由多张 B-样条曲面片组成,具有局部性质。因此, B-样条曲面为凸的条件除了要求每张曲面片为凸外,还要求每相邻两张曲面片间的连接仍然保持凸性。根据两相邻 B-样条曲面片间可达到至少一阶倒数连续的性质,只需要各相邻曲面片同向凸即可保证曲面的凸性,即保证 $(m+1) \times (n+1)$ 个控制顶点 $d_{i,j}(i=0,1,\dots,m; j=0,1,\dots,n)$ 构成的网格是凸的。

3 B-样条曲面的保凸拼接条件

工业产品形状的数学描述重在解决曲面的数学描述。由于实际形状的复杂性,用单一曲面往往难以实现,很多时候都采用拼接曲面。根据推论 2.2 控制网格与 B-样条曲面凸性的关系,可以得到 B-样条曲面的保凸拼接条件。B 样条曲面本身就是组合曲面,本节主要讨论怎样组合才使得曲面是凸的。

设有一个凸的 $k \times l$ 次 B-样条曲面片:

$$s(u,v) = \sum_{i=e-k}^e \sum_{j=f-l}^f d_{i,j} N_{i,k}(u) N_{j,l}(v), u \in [u_e, u_{e+1}] \subset [u_k, u_{m+1}], \\ v \in [v_f, v_{f+1}] \subset [v_l, v_{n+1}] \quad (4)$$

对于该曲面来说,只要在网格 u 向或 v 向增加一排顶点,那么就增加了一个曲面片,并且增加的曲面仍然具有原来的连续性。所以,如何构造这一排顶点使生成的曲面与原曲面完成保凸拼接是解决问题的重点。

由推论 2 知道,当控制子网为平行四边形时,网格凸则 B-样条曲面凸。于是就得到 B-样条曲面保凸拼接的条件:

推论 3 构造的 u 向顶点 $d_{e+1,j}$ 和 v 向顶点 $d_{i,f+1}$ 分别要满足:

$$\begin{cases} \Delta^{0,1}d_{e,j} = \Delta^{0,1}d_{e+1,j} \\ (\Delta^{1,0}d_{e-1,j}, \Delta^{0,1}d_{e,j}, \Delta^{1,0}d_{e,j}) \leq 0 (\geq 0) \end{cases} \quad (5)$$

和

$$\begin{cases} \Delta^{1,0}d_{i,f} = \Delta^{1,0}d_{i,f+1} \\ (\Delta^{0,1}d_{i,f-1}, \Delta^{1,0}d_{i,f}, \Delta^{0,1}d_{i,f}) \leq 0 (\geq 0) \end{cases} \quad (6)$$

注意,若原 B-样条曲面上凸,则式(5)和式(6)都取 ≤ 0 ;若为下凸,则都取 ≥ 0 。

4 保凸拼接的 B-样条曲面实例

已知一凸得到 B-样条曲面片如图 1 所示,而沿 v 向的保凸拼接曲面如图 2 所示,沿 u 向的保凸拼接曲面如图

3 所示,面四片三次 B-样条曲面片的拼接如图 4 所示。



图 1 三次凸 B-样条曲面片 s

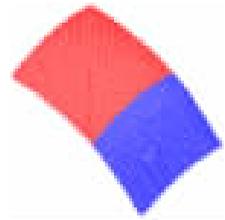


图 2 沿 v 向的保凸拼接 B-样条曲面

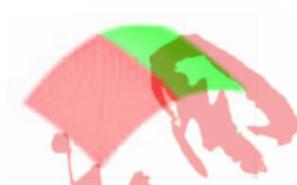


图 3 沿 u 向的保凸拼接 B-样条曲面



图 4 面四片三次 B-样条曲面片的拼接

本文重点讨论了 B-样条的凸性和保凸拼接,但只研究均匀与准均匀 B 样条,而对于非均匀 B 样条以及非均匀有理 B 样条有待进一步深入探讨。

参考文献

- [1] Liu C, TRASS C R. On convexity of planar curves and its application in CAGD[J]. CAGD, 1997, 14(6):653-669.
- [2] 刘鼎元.平面 n 次 Bézier 曲线的凸性定理[J].数学年刊, 1982, 3(1):45-55.
- [3] 王国瑾,汪国昭,郑建民,等.计算机辅助几何设计[M].北京:高等教育出版社,2001.
- [4] Liu Zhi, Tan Jieqing, Chen Xiaoyan, et al. The conditions of convexity for Bernstein-Bézier surfaces over triangles[J]. Computer Aided Geometric Design, 2010, 27(6):421-427.
- [5] KORAS G D, KAKLIS P D. Convex conditions for parametric tensor-product B-spline surfaces[J]. Advances in Computational Mathematics, 1999(10):291-309.
- [6] WILHELM K. A course in differential geometry [M]. New York: Springer-Verlag, 1978.
- [7] DAHMEN W, MICCHELLI C A. Convexity of multivariate Bernstein polynomial and Bos spline surface [J]. Studa Sci. Math. Hungar, 1998, 23:265-287.
- [8] 梅向明,黄敬之.微分几何[M].北京:高等教育出版社,1998.
- [9] 苏步青.微分几何五讲[M].上海:上海科技出版社,1979.
- [10] 方逵.计算机辅助几何设计中的保形插值理论及算法[M].长沙:湖南人民出版社,2003.

(收稿日期:2011-09-13)

作者简介:

金席卷,男,硕士,讲师,主要研究方向:计算机辅助设计与计算机图形学。