

递推最小二乘参数辨识与仿真实例

关晓慧, 吕跃刚

(华北电力大学 控制与计算机工程学院, 北京 102206)

摘要: 介绍了基于递推最小二乘法进行系统辨识的基本原理, 对给定的实际输入输出数据运用 MATLAB 的 M 语言编写递推最小二乘算法, 最后给出相应的仿真结果和分析, 并对得到的模型进行验证。

关键词: 系统辨识; 递推最小二乘; MATLAB; 仿真

中图分类号: TP391.9

文献标识码: A

文章编号: 1674-7720(2011)20-0091-02

Parameter identification and simulation using RLS

Guan Xiaohui, Lv Yuegang

(School of Control and Computer Engineering, North China Electric Power University, Beijing 102206, China)

Abstract: This paper described the basic principles that how to conduct system identification using recursive least square method. Combined with the given actual input and output data, the M program language in MATLAB was used to design the algorithm of RLS. Finally, the simulation result and analysis were given, and the model was validated.

Key words: system identification; RLS; MATLAB; simulation

对于一个系统, 在输入输出数据的基础上, 从一组给定模型类中, 确定一个与所测系统等价的模型, 这种方法叫做辨识。辨识是在实际应用中获取系统模型的最为重要的手段之一, 也是数学模型和实际应用联系的纽带。而最小二乘类辨识则是在给定的结构框架下, 利用模型输出与实际输出间的误差不断纠正模型参数, 最终得到最优模型的过程^[1]。在使用最小二乘法进行参数估计时, 为了实现实时控制, 必须优化成递推算法 RLS (Recursive Least Square), 主要用于在线辨识。MATLAB 是一种面对科学计算、可视化以及交互式程序设计的高科技计算环境。它将数值分析、矩阵计算、科学数据可视化以及非线性动态系统的建模和仿真等诸多强大功能集成在一个易于使用的视窗环境中, 为科学研究、工程设计以及必须进行有效数值计算的众多科学领域提供了一种全面的解决方案, 并在很大程度上摆脱了传统非交互式程序设计语言(如 C、Fortran)的编辑模式, 代表了当今国际科学计算软件的先进水平^[2]。

本文使用 MATLAB2009a 的 M 语言对递推最小二乘算法进行编程, 最后使用 MATLAB 自带的辨识工具箱 SIT(System Identification Toolbox)对得到的仿真结果进行了验证。

1 线性系统辨识^[3]

1.1 问题描述

考虑如下线性系统:

$$z(k) + a_1 z(k-1) + \dots + a_n z(k-n) = b_1 u(k-1) + \dots + b_n u(k-n) + v(k) \quad (1)$$

其中, $u(k)$ 为系统激励信号, $z(k)$ 为系统输出, $v(k)$ 为模型噪声。 $u(k)$ 、 $z(k)$ 在各个离散点上都是可观测的。其系统模型如图 1 所示。

令:

$$\begin{cases} A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n} \\ B(z^{-1}) = b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n} \end{cases} \quad (2)$$

则系统可表示为:

$$A(z^{-1})z(k) = B(z^{-1})u(k) + v(k) \quad (3)$$

系统传递函数模型 $G(z^{-1})$ 为:

$$G(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \quad (4)$$

其对应的辨识问题的表达形式如图 2 所示。

图 2 中, $h(k)$ 和 $z(k)$ 是模型的输入输出变量, 在离散点上必须是可观测的; $v(k)$ 为模型噪声; θ 是未知模型参数。

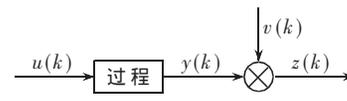


图 1 SISO 系统模型结构示意图

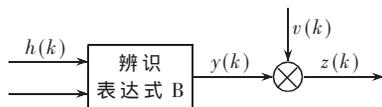


图2 SISO系统模型数学表达式

记:

$$\begin{cases} h(k)=[-z(k-1), -z(k-2), \dots, -z(k-n), \\ u(k-1), u(k-2), \dots, u(k-n)]^T \\ \theta=[a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n]^T \end{cases} \quad (5)$$

则差分方程(1)可写为如下最小二乘形式:

$$z(k)=h^T(k)\theta+v(k) \quad (6)$$

如何在系统噪声 $v(k)$ 存在的情况下从该方程中正确解出 θ , 即是系统辨识的任务。

1.2 准则函数

在式(6)中, 令 $k=1, 2, 3, \dots, L$, 可构成线性方程组:

$$z_L(k)=H_L^T(k)\theta+v_L(k) \quad (7)$$

式中:

$$z_L = \begin{bmatrix} z(1) \\ z(2) \\ \vdots \\ z(L) \end{bmatrix}, \quad v_L = \begin{bmatrix} v(1) \\ v(2) \\ \vdots \\ v(L) \end{bmatrix}$$

$$H_L = \begin{bmatrix} -z(0) & \dots & -z(1-n_a) & u(0) & \dots & u(1-n_b) \\ -z(1) & \dots & -z(2-n_a) & u(1) & \dots & u(2-n_b) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -z(L-1) & \dots & -z(L-n_a) & u(L-1) & \dots & u(L-n_b) \end{bmatrix} \quad (8)$$

因为本文主要探讨最小二乘类辨识方法, 在此选取准则函数:

$$\begin{aligned} J(\theta) &= \sum_{k=1}^L [v(k)]^2 = \sum_{k=1}^L [z(k)-h^T(k)\theta]^2 \\ &= (z_L-H_L\theta)^T(z_L-H_L\theta) \end{aligned} \quad (9)$$

将准则函数 $J(\theta)=\min$ 中的 θ 估计值记做 $\hat{\theta}_{LS}$, 称作参数 θ 的最小二乘估计值。极小化 $J(\theta)$, 求得参数 $\hat{\theta}_{LS}$, 可使模型更好地预报系统的输出。

1.3 递推最小二乘算法 (RLS)

递推辨识算法的思想可以概括为:

新的参数估计值=旧的参数估计值+修正项

即新的递推参数估计值是在旧的递推估计值的基础上修正而成, 这就是递推的概念。递推算法就是依时间顺序, 每获得一次新的观测数据就修正一次参数估计值, 随着时间的推移, 便能获得满意的辨识结果。

由参考文献[3]可知, 递推最小二乘算法可表示为:

$$\begin{cases} \hat{\theta}(k)=\hat{\theta}(k-1)+K(k)[z(k)-h^T(k)\hat{\theta}(k-1)] \\ K(k)=P(k-1)h(k)[h^T(k)P(k-1)h(k)+1]^{-1} \\ P(k)=[I-K(k)h^T(k)]P(k-1) \end{cases} \quad (10)$$

2 仿真实例^[4]

2.1 选择输入信号

为了准确辨识系统参数, 对输入信号有如下要求:

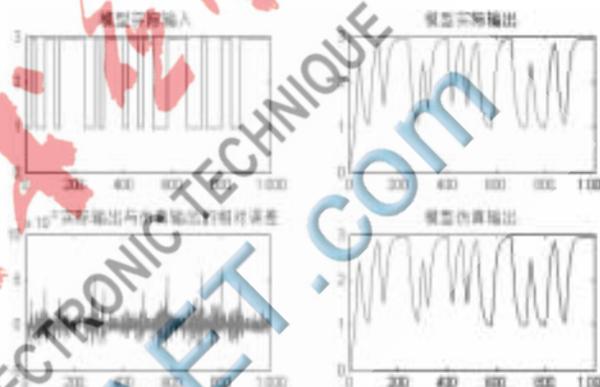
在辨识时间内, 过程的动态必须被输入信号持续激励。从谱分析角度看, 这就意味着信号频带能覆盖系统的频带宽度。除此之外还要求信号有可重复性, 不能是不可重复的随机噪声, 因此本文选择满足上述要求的 M 序列作为输入信号。

2.2 先验知识

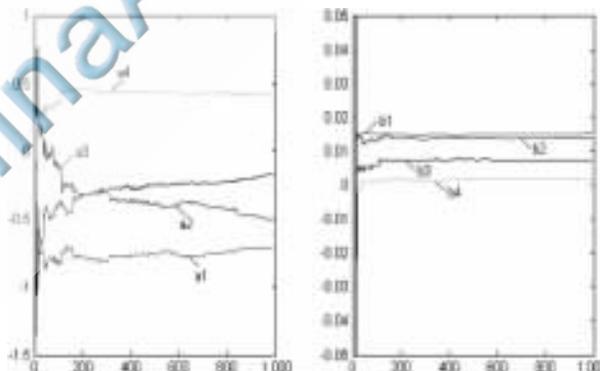
在对给定的过程进行辨识之前, 掌握如下先验知识: 纯延迟 $d=0$; 模型如式(7)所示, 且数据长度 $L=1\ 000$, $n_a=n_b=4$ 。

2.3 模型参数辨识

本例中的参数是指 $\hat{\theta}_{LS}$ 的元素 a_n 和 $b_n(n=1, 2, 3, 4)$ 。本文选择递推最小二乘算法对参数进行辨识。编写的 M 文件运行结果如图 3 所示。



(a) 模型输入输出及其误差



(b) 模型参数

ans =
-0.7106 -0.4955 -0.1697 0.4143 0.0153 0.0142 0.0074 0.0015

(c) 模型参数值

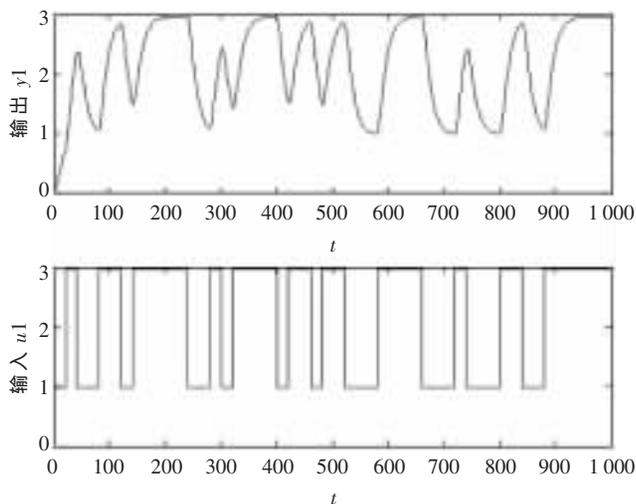
图3 程序运行结果

由图 3(a)可知, 系统仿真输出与实际输出的相对误差极小, 模型辨识精度较高。由图 3(c)可知, 系统传递函数为:

$$G(z^{-1}) = \frac{0.0153z^{-1} + 0.0142z^{-2} + 0.0074z^{-3} + 0.0015z^{-4}}{1 - 0.7106z^{-1} - 0.4955z^{-2} - 0.1697z^{-3} + 0.4143z^{-4}}$$

2.4 模型验证

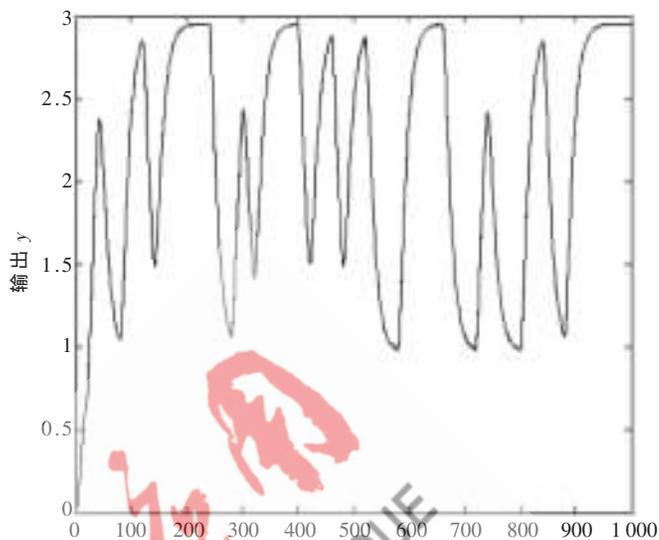
本文使用 MATLAB 自带的辨识工具箱 SIT(System



(a) 模型实际输入输出

```
Opening System Identification Tool ..... done
Discrete-time IDPOLY model: A(q)y(t) = B(q)u(t) + e(t)
A(q) = 1 - 0.7118q^-1 - 0.4942q^-2 - 0.1693q^-3 + 0.4139q^-4
B(q) = 0.01527q^-1 + 0.01423q^-2 + 0.00736q^-3 + 0.001446q^-4
Estimated using ARX from data set eDat
```

(c) 模型参数值



(b) 模型仿真输出

图 4 SIT 运行结果

Identification Toolbox)对得到的仿真结果进行验证。在 MATLAB2009a 的 Command Window 中输入 ident 命令, SIT 被打开。需将给定的输入输出数据设置为该模块的输入输出方可进行验证。结果如图 4 所示。

由图 3(c)和图 4(c)中所得的模型参数可以看出,本文编写的递推最小二乘法可以快速准确地估计出系统参数,获得较好的辨识结果。

本文介绍了基于递推最小二乘法进行系统辨识的基本原理,对给定的实际输入输出数据运用 MATLAB 的 M 语言编写递推最小二乘法,最后给出相应的仿真结果和分析,并对得到的模型进行了验证。递推最小二乘法的算法简单,能减少计算量,减少数据在计算机中占用的内存,并实时辨识出系统动态特性以供实时控制和预报。

参考文献

- [1] 倪博溢,萧德云. MATLAB 环境下的系统辨识仿真工具箱[J]. 系统仿真学报, 2006, 18(6): 1493-1496.
- [2] 石贤良,吴成富. 基于 MATLAB 的最小二乘法参数辨识与仿真[J]. 微处理机, 2005, 26(6): 44-46.
- [3] 方崇智,萧德云. 过程辨识[M]. 北京:清华大学出版社, 1988.
- [4] 张志涌. 精通 MATLAB6.5 版[M]. 北京:北京航空航天大学出版社, 2003.

(收稿日期: 2011-05-24)

作者简介:

关晓慧,女,1989年生,在读硕士研究生,主要研究方向:风力发电机组状态监测与故障诊断。